Don. Lud.
XLV 2

Don. Lud. XLV, 2.

Geschenk
Seiner Majestät des Königs Ludwig I.
aus
Höchstdessen Privatbibliothek.

Erörterung
einiger Hauptmomente
in der Lehre
von dem geometrischen Verhältnisse
im Sinne Euklid's und anderer
Mathematiker.

Ein Programm
zu den Vorlesungen über die reine allgemeine
Größenlehre

von

Dr. Joh. Schön,
öffentlichem und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, und corresp. Mitgliede der K. K. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde.

Würzburg 1821.
Gedruckt bei Carl Wilhelm Becker, Universitäts-Buchdrucker.

Bayerische Staatsbibliothek München

De

<36625247840019 S

<36625247840019

Bayer. Staatsbibliothek

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Wenn ich mich in dieser Abhandlung von manchen Ansichten und Behauptungen scharfsinniger Mathematiker, wie Hausen, Kästner, Hindenburg, Karsten, abweichend erklärt habe: so verfolgte ich lediglich den Weg freier, vom Ansehen ungefesselter, Forschung über einen Gegenstand, der für die gesammte Mathematik von Wichtigkeit ist. Ob ich irrte, wird die strenge Kritik des Mathematikers entscheiden. Ist es aber Wahrheit, was ich fand, so wird dieselbe Kritik dazu beitragen, daß die jüngeren Mathematiker von einem Wege ab-

lassen, auf dem weder Licht noch Harmonie für die Arithmetik zu erzielen ist. Daß hier keine Theorie zu suchen sey, zeigt der Titel; es war vorerst das Fundament zu untersuchen, auf dem sie mit Sicherheit und ohne Verletzung der Symmetrie des ganzen Gebäudes, von dem sie ein Theil ist, ruhen könnte.

Würzburg den 10. Oktober 1821.

Der Verfasser.

Ueber das Verhältniß *).

§. 1. Erklärung 1. a) Euklid's (elem. libr. V. def. 3): λόγος ἐστὶ δύο μεγέθων ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις; — nach der Uebersetzung **): ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quaedam secundum quantitatem habitudo. b) Purbach's ***): *proportio* ****) est duarum quantitatum ejusdem generis

*) So wird von Euklid und den älteren Mathematikern das geometrische Verhältniß schlechthin genannt.

**) Euclidis Elementorum libri VI. priores planorum ac XI. et XII. solidorum, etc. a J. H. Van Lom. Amstel. 1738.

***) Elementa Arithmetices. Algorithmus de numeris integris etc. 1536 cum praefacione Phil. Melanth. (Heilbronner und Kästner scheinen dieses Lehrbuch nicht gekannt zu haben). Purbach, von seinem Geburtsorte, an Oesterreichs und Baierns alter Grenze, auch Peurbach genannt und geschrieben, berühmt als Wiederhersteller der Astronomie, wurde geboren 1423 d. 30. May, und starb zu Wien d. 8. April 1461.

****) So die Mathematiker dieser Zeit statt ratio.

certa habitudo, ut patet quinto Elementorum Euclidis. c) Hausen's *): ratio quantitatis A ad B est habitudo ipsius A respectu B, qua fit, ut A contineat certum quid et determinatum ipsius B.

Zusatz 1. Es werden also zwei gleichartige Größen (quanta homogenea) in Verhältniß zu einander gesetzt, oder im Verhältnisse betrachtet, in wiefern man sie in Absicht auf ihre Quantität (nicht Qualität) mit einander vergleicht.

Zusatz 2. Mit Euklid's Erklärung stimmt überein die der neueren Mathematiker, nach welcher das Verhältniß zweier Größen die Art ist, wie eine aus der andern erzeugt wird. Da eine Größe aus der andern 1) nur hinsichtlich ihrer Quantität, 2) nur insofern erzeugt gedacht werden kann, als sie mit der andern gleichartig ist: so erhellt, daß diese Erklärung als nothwendig ausspreche, daß die in Verhältniß zu einander zu setzenden Größen nur als gleichartige Größen und blos hinsichtlich ihrer Quantität mit einander verglichen werden sollen (Zus. 1).

§. 2. Erklärung 2. Euklid's (lib. V. def. 4): λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; nach der Uebersetzung: rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare.

---

*) Elementa Matheseos. Lips. 1734.

Zusatz 1. Diese Erklärung setzt die Homogeneität der im Verhältnisse zu betrachtenden Größen außer allen Zweifel; so kann nicht die Linie mit der Fläche, die Fläche nicht mit dem Körper im Verhältnisse betrachtet werden, weil die Linie, vervielfältigt oder noch so groß genommen, nicht die Fläche und diese, vervielfältigt, nicht den Körper übertreffen kann.

Zusatz 2. Zugleich wird sowohl durch diese, als durch jene erste Erklärung (§. 1) klar ausgesagt, worin der eigentliche Vergleichpunkt der in Verhältniß gesetzten Größen bestehe, nämlich in dem Bestimmen, um das Wievielfache die eine Größe die andere übertreffe, oder ob zwischen beiden Größen dieselbe Quantität Statt finde.

Zusatz 3. Die Bestimmung des Vielfachen, um welches die eine Größe die andere übertrifft, ist der Ausdruck einer unbenannten Zahl. Diese, die relative Quantität der in Verhältniß gesetzten Größen ausdrück-nde, Zahl nannten die späteren Mathematiker den Exponenten, Namen, Nenner (nach Purbach denominator) des Verhältnisses und die verglichenen Größen die Glieder (terminos) desselben.

Zusatz 4. Man findet den Exponenten des Verhältnisses entweder dadurch, daß man die eine der verglichenen Größen als Einheit (Maß) annimmt und sieht, wie oft sie in der andern Größe wiederholt sey; oder indem man beide Größen an dasselbe Maß hält und untersucht, wie oft dieses in

jeder der im Verhältnisse betrachteten Größen enthalten sey.

Uebrigens ist von selbst klar, daß die Einheit lediglich unter der allgemeinen Bedingung der Gleichartigkeit mit den verglichenen Größen stehe, indem diese aus jener entsprungen gedacht werden.

Beispiel. Man vergleicht 2 gerade Linien A, B in Absicht auf Quantität miteinander. Ist nun schon bestimmt, daß A 6, B 2 Fuß lang sey: so kann man sich die 6 Fuß lange Linie A dadurch aus der 2 Fuß langen Linie B, als der Einheit oder dem Maße, entsprungen denken, daß diese letztere in der ersteren 3 mal wiederholt wurde. Oder man bestimmt, wie oft die Einheit, hier der Fuß, in der Linie A, und wie oft er in der Linie B enthalten sey. Findet man, daß diese Einheit in B 2 mal, in A 6 mal wiederholt werden könne: so weiß man, daß, weil sie in A 3 mal mehr wiederholt ist, als in B, die Linie B von der Linie A hinsichtlich der Quantität um das 3fache übertroffen werde, daß sich demnach A zu B verhalte, wie 6 zu 2, oder auch wie 3 zu 1.

Zusatz 5. Man findet also den Exponenten eines bloßen Zahlenverhältnisses, wenn man die zuerst gesetzte Zahl (das Vorderglied) durch die zweite oder nachfolgende Zahl (das Hinterglied) dividirt*),

*) Purbach und die meisten Mathematiker lassen mit Euklid das erste Glied aus dem zweiten entsprin-

indem bei verglichenen Zahlen, die man sich aus der Zahleinheit entsprungen denkt, das Maß eben diese Einheit, oder an und für sich verstanden ist.

Zusatz 6. Da der Exponent des Verhältnisses nur eine Zahl ist (Zus. 3), so muß jedes Verhältniß, in welchem die verglichenen Größen keine Zahlen sind, auf ein Zahlenverhältniß gebracht, oder einem Zahlenverhältnisse gleich gestellt werden, wenn der Exponent des Verhältnisses bestimmt werden soll.

Zusatz 7. Wenn man daher zunächst für jedes Zahlenverhältniß, allgemein durch „b zu a“ vorgestellt, die Formel „ae zu a,“ wenn e den Exponenten bezeichnet, aufstellen kann, so, daß der Exponent $\frac{b}{a}$ oder $\frac{ae}{a}$ (= e) als Quotient aus der Division des Vordergliedes durch das Hinterglied erscheint: so ist dieselbe Formel für jedes andere Verhältniß in Absicht auf die Bestimmung des die relative Quantität der verglichenen Größen ausdrückenden Exponenten e gültig. Wenn z. B. L, l die homologen (an wechselseitig gleichen Winkeln liegenden) Seiten zweier ähnlichen Dreiecke T, t vorstellen: so verhält sich T zu t, wie L^2 zu l^2, oder wie das Quadrat Q, das man sich über L construirt denkt, zum Quadrate q, über l

gen, wenn man gleich mit Kästner auch die entgegengesetzte Verfahrungsart einhalten kann.

konstruirt (vermöge des 19. Satz. im VI. B. Euklid's). Hier werden zunächst Flächenräume mit Flächenräumen in Verhältnissen betrachtet. Soll aber ausgemittelt werden, um das Wievielfache t von T, oder q von Q, übertroffen werde: so muß man z. B. l^2 gleich einer Zahl a, demnach L^2 gleich ae machen (vergl. Zus. 4), so, daß man erhält: T zu t, wie ae zu a, wo denn der Exponent oder Quotient e angiebt, wie vielmal T größer, als t, sey.

Nur in diesem Sinne ist es streng wahr, daß der Exponent des Verhältnisses der Quotient aus der Division des ersten Gliedes durch das zweite ist. Was nämlich A und B immer für Größen seyn mögen, die man mit Hülfe des gleichartigen Maßes im Verhältnisse vergleicht, immer verhält sich dann A zu B, wie ae zu a, oder es ist $\frac{A}{B} = \frac{ae}{a} = e$.

Anmerkung. Auf diese Weise sieht man ein, daß die Lehre vom Verhältnisse einer der wichtigsten Theile der allgemeinen Größenlehre sey, von welcher Euklid und die älteren Mathematiker kaum eine Idee hatten. Da ferner der Mathematik Hauptgegenstand ist das Bestimmen der Quantität der Größen, was nur durch Zahlen möglich ist: so erhellt zugleich, daß die gesammte Mathematik ihrem Hauptgegenstande oder Endziele nach auf der Theorie des geometrischen Verhältnisses beruhe. Hierin mag denn auch der Grund gesucht werden, warum Euklid das geometrische Verhältniß schlechthin Verhältniß nennt.

§. 3. Bezeichnung des Verhältnisses. Aus dem (§. 2. Zus. 7) Gesagten geht klar hervor, daß der Mathematiker das Verhältniß der Größe A zur Größe B mit Recht durch „A : B", d. i. durch das Colon, als Zeichen der Division überhaupt, kurz bezeichne. Rothe *), welcher wegen einer zweiten Erklärung der Division auch ein zweites Zeichen, nämlich das Semicolon (;), einführte, fand sich durch seine Erklärung des geometrischen Verhältnisses veranlaßt, zu schreiben A ; B. Allein da man die Zeichen ohne Noth weder vervielfältigen, noch, wenn sie einmal recipirt sind, abändern soll; da ferner die Bezeichnung immer willkührlich bleibt, und die Erklärung des Gegenstandes es eigentlich ist, was gegen Mißdeutung schützen muß: so ziehen wir es vor, die gewöhnliche Bezeichnung beizubehalten.

Anmerkung. Die nun übliche Bezeichnung des Verhältnisses und der Proportion, wie a : b = c : d, kam bei uns erst im Anfange des 18ten Jahrh. so ganz in Aufnahme, besonders durch die Lehrbücher Wolf's und Hausen's **). Die Mathematiker Englands, z. B. Newton, schrieben a ad b : : c ad d. Das Zeichen (: :) statt (=)

---

*) Systematisches Lehrbuch der Arithmetik. 2 Theile. Leipz. 1804. 1811. Vergl. Th. 1. Kap. 5. Sätze 1. 2. u. 8. mit Zus. 1. dann Kap. 9. Zus. 4. zu Satz 16. endlich Th. 2. Seite 102.

**) Leibnitz war der erste, der sich des Zeichens (=) bei der Proport. bediente.

hat sich bei den italienischen und französischen Mathematikern am längsten erhalten. La Caille in seinem bekannten Lehrbuche führt folgende Bezeichnungen an, die noch zu seiner Zeit zum Theile im Gebrauche gewesen seyn müssen, nämlich : a . b :: c . d; a : b :: c : d; a | b || c | d.

§. 4. Eintheilung 1. in rationales und irrationales Verhältniß.

Erklärung 3. Das Verhältniß heißt rational, wenn der Exponent desselben entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch von genau angeblichem Zähler und Nenner ist; die in einem solchen Verhältnisse betrachteten Größen heißen, auf einander bezogen, Rational- oder commensurable Größen und der Exponent Rationalzahl. Das Verhältniß heißt irrational, dessen Exponent weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch von genau angeblichem Zähler und Nenner ist; die in einem solchen Verhältnisse stehenden Größen nennt man, aufeinander bezogen, Irrational- oder incommensurable Größen und den Exponenten Irrationalzahl (numerum surdum).

Zusatz 1. Also ist jede Wurzel aus einer Zahl, die keine dem Exponenten der Wurzel entsprechende Potenz, oder in Beziehung auf diesen Exponenten eine unvollkommene Potenz (wie man es auch zu nennen pflegt,) ist, eine Irrationalzahl; z. B. $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{27}$, . . .

Zusatz 2. Wenn daher in dem Ver-

hältnisse b : a der Exponent e z. B. = $\sqrt{2}$ ist, so, daß man hat $a\sqrt{2} : a$, so erkennt man, daß das Verhältniß der Größen b, a irrational sey, oder man sagt, b und a stehen in einem Irrationalverhältnisse zu einander, d. i. ihre relative Quantität sey nicht genau angebbar, keine dieser Größen messe folglich die andere. Es ist daher im Allgemeinen nicht richtig, ein Verhältniß darum irrational zu nennen, weil die in ihm verglichenen Größen, jede für sich betrachtet, Irrationalgrößen sind. Denn das Verhältniß solcher Größen ist bald rational, bald irrational. So z. B. ist sowohl $\sqrt{27}$, als $\sqrt{3}$ eine Irrationalgröße, aber das Verhältniß $\sqrt{27} : \sqrt{3}$ ist rational, weil der Exponent dieses Verhältnißes $= \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$ ist.

Zusatz 3. Gleichwie man das Verhältniß zweier incommensurablen Größen (z. B. zweier geraden Linien; zweier Bogen oder Winkel) dadurch auf ein Rationalverhältniß zurückebringen kann, daß man von der Maßeinheit einen immer kleineren und kleineren Theil nimmt und dieses als neues Maß anwendet *); eben so kann man jedes Irrationalverhältniß zweier Zahlen auf ein rationales bringen, weil man die Irrationa-

*) Kästner's Lehrbegriff. Arithmetik. 2te Ausg. S. 215 und 224.

lität jeder Zahl, so weit man will, verschwinden machen kann *), d. i. man kann das Irrationalverhältniß durch ein Rationalverhältniß so genau ausdrücken, als man will. Es ist folglich Alles, was vom Rationalverhältnisse gilt, auch vom Irrationalverhältnisse gültig.

Zusatz 4. Aus dem, daß das Verhältniß gleichnamiger Wurzelgrößen irrational ist, kann man nicht so fort schließen, daß auch das Verhältniß der gleichvielsten Potenzen jener Wurzelgrößen irrational sey, weil sich die Irrationalität in diesem Falle heben kann. Eben so kann man aus dem Rationalseyn des Verhältnisses gleichnamiger Potenzen zweier Größen nicht schließen, daß ihre gleichvielsten Wurzeln im Rationalverhältnisse stehen. So ist das Verhältniß der Diagonale zur Seite eines Quadrates irrational, weil sich die Diagonale zur Seite des Quadrates verhält, wie $\sqrt{2} : 1$; aber das über der Diagonale construirte Quadrat verhält sich zu dem über die Seite construirten Quadrate, wie 2 : 1; dieses Verhältniß ist also rational **).

Anmerkung 1. Mit obigen Erklärungen wesentlich einstimmend ist, wie sich die älteren Mathematiker, ohne Zweifel im Sinne der Sätze 6 u. 7 des 10. Buches der Elem. Euklid's („Grö-

---

*) Vergl. ebend. S. 123.

**) Euklid handelt im X. B. der Elem. von diesen und ähnlichen Wahrheiten.

ßen, welche sich wie Zahlen zueinander verhalten, sind commensurabel; incommensurable Größen verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander" — nach Lorenz's Uebersetzung), über diesen Gegenstand ausdrückten. Clavius *) z. B. sagt: duplex est proportio (sc. ratio), rationalis, quae inter quantitates commensurabiles existit, atque adeo omnis in numeris reperiri potest; et irrationalis, quae inter quantitates incommensurabiles existit, et nullo modo in numeris potest reperiri.

Anmerkung 2. Eine Eintheilung der Verhältnisse in mögliche und unmögliche (imaginäre) wird von den Mathematikern in der Lehre vom Verhältnisse nicht aufgestellt, obgleich hie und da von unmöglichen Verhältnissen die Rede ist. Consequent müßte das unmögliche Verhältniß als solches erklärt werden, dessen Exponent eine imaginäre Zahl ist, wie $a\sqrt{-1}$, oder allgemein $a\sqrt[2n]{-1}$. Ein solches Verhältniß würde überhaupt Statt finden zwischen einer möglichen und imaginären Größe. Würde man demnach Leibnitzens Behauptung, daß Verhältnisse negativer Zahlen imaginär seyen, allgemein nehmen, so wäre sie falsch. Allein es war dieser Gegenstand ein Punkt der Streitigkeit zwischen Leibnitz und Joh. Bernoulli **) lediglich hinsichtlich der Möglichkeit der Logarithmen für negative Zahlen. Uebrigens hat

*) Euclidis Elementorum libri XV. etc. Edit. 4ta. Francof. 1607. Vid. pag. 354.

**) Vergl. Commerc. epist. Tom. II.

nebst Karsten (in seinen mathem. Abhandl.) besonders Kästner Leibnitzens Sinn zu erörtern gesucht *).

§. 5. Eintheilung 2. in das Verhältniß der Gleichheit und Ungleichheit.

Erklärung 4. Das Verhältniß heißt Verhältniß der Gleichheit, dessen Exponent gleich der Einheit ist, wie in a : a oder 1 : 1; aber Verhältniß der Ungleichheit, dessen Exponent irgend eine andere Zahl außer der Einheit ist.

Zusatz 1. Die Null, als gerade Zahl und meßbar durch jede Zahl, steht also in demselben Verhältnisse der Ungleichheit zu jeder andern Zahl, und wenn man im Verhältnisse 0 : a die relative Quantität oder den Exponenten e entweder (in $\frac{0}{a}$) = 0, oder (in $\frac{a}{0}$) = ∞ bestimmt; so zeigt dieses nichts anders an, als daß entweder jede Zahl gegen Null unendlich groß, oder Null gegen jede Zahl a unendlich klein oder verschwindend sey.

Zusatz 2. Jedes Verhältniß der Gleichheit ist ein rationales, und jedes irrationale Verhältniß ist ein Verhältniß der Ungleichheit (§. 4).

§. 6. Unterabtheilung.

Erklärung 5. Das Verhältniß der

---

*) Vergl. Leipziger Magazin zur Naturk., Mathem. ꝛc. für 1786.

Ungleichheit ist entweder das der größeren oder kleineren Ungleichheit, je nachdem der Exponent des Verhältnisses > oder < 1 ist. So ist das Verhältniß 4 : 3 ein Verhältniß der größeren, und 3 : 4 ein Verhältniß der kleineren Ungleichheit.

Purbach (im cit. B.) sagt: vel major numerus praeponitur, ut 4 ad 3, tunc majoris inaequalitatis dicitur, vel minor numerus praeponitur, tunc minoris inaequalitatis dicitur (sc. ratio s. proportio). Man kann auch sagen: dieses Verhältniß beständig zunehmend, jenes beständig abnehmend, nähert sich dem Verhältnisse der Gleichheit ins Unendliche.

Anmerkung. Jordan *), Purbach, Clavius und die meisten Mathematiker jener Zeit führen 5 Arten der größeren sowohl, als kleineren Ungleichheit an, doch so, daß die entsprechenden 5 Arten des letzteren Verhältnisses durch dieselben Prädikate mit dem vorgesetzten Wörtchen „sub" benannt werden, wie die 5 Arten des ersteren Verhältnisses (z. B. ratio multiplex — Submultiplex). Die neueren Mathematiker umgehen die Aufzäh-

*) Jordani Nemorarii Arithmetica decem libris demonstrata, 1514. Vergl. Kästner's Gesch. d. Math. 1 Th. S. 88. Heilbronner (historia mathes. univ. pag. 502) führt unter Regiomontan's unedirten Schriften auch eine mit dem Tit. „Jordani Arithmetica" an, wahrscheinlich ein Commentar des ersten Buches, auf welches sich auch Purbach in der Lehre vom Verhältnisse beruft.

lung dieser Arten; allein sie zu kennen, ist zum Verstehen der älteren mathem. Schriften nothwendig, weßwegen wir sie mit ihren lateinischen Benennungen kurz anführen wollen.

Die 5 Arten des Verhältnisses der größeren Ungleichheit sind: ratio multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens. 1. Die ratio multiplex findet Statt, wenn das Hinterglied ein Maß des Vordergliedes ist. Unterarten sind: ratio dupla (wie 4 : 2); tripla (wie 6 : 2), u. s. w.; die entsprechenden Unterarten des Subvielfachen Verhältnisses sind: ratio subdupla (wie 1 : 2); subtripla (wie 1 : 3), u. s. w. — 2. Die ratio superparticularis findet zwischen 2 verglichenen Größen Statt, wenn die größere die kleinere einmal und noch einen aliquoten Theil der letzten enthält; so hat z. B. eine gerade Linie von 12 Fußen ein superpartikulares Verhältniß zu einer 9 Fuß langen Linie, weil jene die letztere einmal, und noch überdieß eine Linie von 3 Fußen, als den 3ten Theil der kleineren Linie enthält. Unterarten dieses Verhältnisses sind: ratio sesquialtera (wie 3 : 2); sesquitertia (wie 8 : 6), u. s. w. — 3. Die ratio superpartiens findet Statt, wenn das Vorderglied das Hinterglied einmal und überdieß einen aliquanten Theil eben dieses Gliedes enthält, z. B. 8 : 5, wo 8 die Zahl 5 einmal und noch 3 Einheiten enthält, welche Zahl nur ein aliquanter Theil von 5 ist. Die Unterarten wurden sowohl vom Zähler, als Nenner des der Einheit beizufügenden Bruches benannt; so ist für 8 : 5 der Exponent $1\frac{3}{5}$, und dieses Verhältniß eine ratio

supertripartiens quintas, wie 9 : 7 eine ratio superbipartiens septimas. — 4. und 5. Das Verhältniß ist entweder eine ratio multiplex superparticularis, oder ratio multiplex superpartiens, wenn die größere Zahl die kleinere mehrmal, und noch überdieß entweder einen aliquoten oder einen aliquanten Theil der kleineren Zahl enthält; so ist 9 : 4 ratio multiplex superparticularis und zwar bestimmt ratio dupla superparticularis sesquiquarta; eben so ist 20 : 6 bestimmt eine ratio tripla superparticularis sesquitertia; aber 11 : 3 ist eine ratio multiplex superpartiens, und zwar bestimmt ratio tripla superbipartiens tertias, u. s. w.

Man begreift übrigens leicht, daß die älteren Mathematiker diese Ein- und Unterabtheilungen des (rationalen) Verhältnisses darum so genau aufzählten und erörterten, um auf das Bestimmteste mit Worten ausdrücken zu können, wie sich eine Größe, z. B. eine gerade Linie, zu einer ihr gleichartigen Größe, auf dasselbe Maß bezogen, verhalte.

§. 7. Erklärung 6. Nach Euklid (lib. V. def. 5.): εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δευτερον, και τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ του πρώτου και τρίτου ἰσάκις πολλαπλασια, τῶν του δευτερου και τέταρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ᾽ ὁποιανοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκάτερου, ἢ ἅμα ελλείπη, ἢ ἅμα ἴσα, ἢ ἅμα ὑπερέχη ληφθέντα καταλληλα; — nach der Uebersetzung: in eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, et tertia ad quartam, cum primae et tertiae aeque multiplicia a secundae et

et quartae aeque multiplicibus, qualiscunque sit haec multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una aequalia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur, quae inter se respondent.

Erklärung 7. nach Euklid (lib. V. def. 6): τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω; — nach der Uebersetzung: eandem habentes rationem magnitudines proportionales vocentur.

Erklärung 8. nach Euklid (lib. V. def. 8.): ἀναλογία ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης; — nach d. Uebers.: proportio est rationum similitudo; Hausen sagt: rationum identitas; die meisten Mathematiker des 16. Jahrhunderts setzten: *proportionalitas* statt proportio. Gregorius a St Vinc. (in seiner Abhandlung: de proportionalitatibus geometricis *) hat folgende Steigerung: ratio, proportio, *proportionalitas*, welche letztere ihm ein Verhältniß zwischen Verhältnissen bedeutete.

Erklärung 9. nach Euklid (lib. V. def. 11): ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις; — nach d. Uebers.: homologae, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

---

*) In dessen Buche: Opus geometricum, quadraturae circuli et sectionum coni, decem libris comprehensum. Antverp. 1647.

Erörterung. Es seyen A, B und C, D gleichartige, commensurable oder incommensurable, Größen (z. B. gerade Linien, wie solche Euklid zunächst im Auge hatte); m und n (im Sinne Euklid's) ganze + Zahlen, und die Zeichen $>$, $=$, $<$ durch das einzige Zeichen $\gtreqless$ (nach Lorenz) zusammengefaßt; man finde, daß für $mA \gtreqless nB$ jedesmal auch $mC \gtreqless nD$ sey, so sind die Größen A, B, C, D proportionirt oder proportional, d. i. es ist $A : B = C : D$. Dieses ist in der allgemeinen Bezeichnung unstreitig der wahre Sinn der zuerst gesetzten Erklärung, wie es schon Clavius gegen des Orontius und Campanus Behauptung, daß nämlich jene Vielfachen proportional seyn müßten, dargethan hat, indem sonst Euklid die Proportionalität durch eben diese definirt hätte.

Ob nun gleich Euklid die ziemlich einfachen und aus der Theorie des Verhältnisses, wenn man dieses in seiner Allgemeinheit auffaßt, sehr leicht zu beweisenden Sätze des V. Buches mit Hülfe jener Definition strenge beweist: so erhellt doch, daß man an ihr kein leicht und schnell anzuwendendes Criterion besitze, um zu erfahren, ob im bestimmten Falle Größen, z. B. die Zahlen 4, 3, 6, 5, proportional seyen, oder nicht. So, wenn man $m = n = 2$ setzt, hat man $8 > 6$ und auch $12 > 10$; eben so, wenn man $m = 4$ und $n = 3$ setzt, hat man $16 > 9$ und auch $24 > 15$, obgleich jene 4 Zahlen nicht proportional sind, wie man er-

et quartae aeque multiplicibus, qualiscunque sit haec multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una aequalia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur, quae inter se respondent.

Erklärung 7. nach Euklid (lib. V. def. 6): τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω; — nach der Uebersetzung: eandem habentes rationem magnitudines proportionales vocentur.

Erklärung 8. nach Euklid (lib. V. def. 8.): ἀναλογία ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης; — nach d. Uebers.: proportio est rationum similitudo; Hausen sagt: rationum identitas; die meisten Mathematiker des 16. Jahrhunderts setzten: *proportionalitas* statt proportio. Gregorius a St Vinc. (in seiner Abhandlung: de proportionalitatibus geometricis *) hat folgende Steigerung: ratio, proportio, *proportionalitas*, welche letztere ihm ein Verhältniß zwischen Verhältnissen bedeutete.

Erklärung 9. nach Euklid (lib. V. def. 11): ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις; — nach d. Uebers.: homologae, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

---

*) In dessen Buche: Opus geometricum, quadraturae circuli et sectionum coni, decem libris comprehensum. Antverp. 1647.

Erörterung. Es seyen A, B und C, D gleichartige, commensurable oder incommensurable, Größen (z. B. gerade Linien, wie solche Euklid zunächst im Auge hatte); m und n (im Sinne Euklid's) ganze + Zahlen, und die Zeichen >, =, < durch das einzige Zeichen Z (nach Lorenz) zusammengefaßt; man finde, daß für mA Z nB jedesmal auch mC Z nD sey, so sind die Größen A, B, C, D proportionirt oder proportional, d. i. es ist A : B = C : D. Dieses ist in der allgemeinen Bezeichnung unstreitig der wahre Sinn der zuerst gesetzten Erklärung, wie es schon Clavius gegen des Orontius und Campanus Behauptung, daß nämlich jene Vielfachen proportional seyn müßten, dargethan hat, indem sonst Euklid die Proportionalität durch eben diese definirt hätte.

Ob nun gleich Euklid die ziemlich einfachen und aus der Theorie des Verhältnisses, wenn man dieses in seiner Allgemeinheit auffaßt, sehr leicht zu beweisenden Sätze des V. Buches mit Hülfe jener Definition strenge beweist: so erhellt doch, daß man an ihr kein leicht und schnell anzuwendendes Criterion besitze, um zu erfahren, ob im bestimmten Falle Größen, z. B. die Zahlen 4, 3, 6, 5, proportional seyen, oder nicht. So, wenn man m = n = 2 setzt, hat man 8 > 6 und auch 12 > 10; eben so, wenn man m = 4 und n = 3 setzt, hat man 16 > 9 und auch 24 > 15, obgleich jene 4 Zahlen nicht proportional sind, wie man er-

kennt, wenn man m = 4 und n = 5 setzt.

Auch giebt Euklid selbst in Beziehung auf die Proportionalität der Zahlen eine andere Erklärung, nämlich def. 20. lib. VII. nach der Uebersetzung: numeri proportionales sunt, cum primus secundi, tertius quarti aequemultiplex est, vel eadem pars, vel eaedem partes. Wir bemerken hiebei, daß, wenn man unter „eaedem partes" auch Theile versteht, wie $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{2}$, . . . diese Erklärung nicht Clavius Vorwurf treffe, als sey sie zu enge, indem sie das superparticulare und superpartiente Verhältniß mit deren Vielfachen nicht unter sich begreife.

Die neueren Mathematiker definiren daher kurz und richtig im Sinne Euklid's: Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben, und Größen, die in gleichen Verhältnissen stehen, sind proportional, oder die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt Proportion; die einzelnen Größen der Proportion heissen ihre Glieder (termini), und unter diesen sind das erste und dritte, d. i. die Vorderglieder, dann das zweite und vierte, d. i. die Hinterglieder, homologe (sich in der Proportion einander entsprechende) Glieder *). Verhältnisse

*) Die von uns zuletzt beigefügte Erklärung sollte in den Lehrbüchern nicht fehlen. Wenn z. B. a, b die den Winkeln A, B resp. gegenüberstehenden Seiten eines ebenen geradlinigen Dreyecks sind: so fodert

sind ungleich, wenn sie ungleiche Exponenten haben. Da hiebei für den Exponenten keine bestimmte Zahl vorausgesetzt ist, so sind die Erklärungen allgemein, welche Verhältnisse auch immer verglichen, und wie auch die Größen beschaffen seyn mögen, die als gleichartige Größen in den verglichenen Verhältnissen stehen. Auch erhellt, daß, wenn A : B = C : D, demnach $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ist, auch $\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}$, folglich, so oft mA > oder < nB ist, auch mC > oder < nD sey.

Dadurch also, daß die neueren Mathematiker das Verhältniß und die Proportion in der Allgemeinheit auffassen, das irrationale Verhältniß auf ein rationales bringen (§. 4. Zus. 3.), sind sie nicht nur jener allgemeinen (Erkl. 6.) und der besondern, bloß für Zahlenverhältnisse aufgestellten, Erklärung Euklid's überhoben, sondern auch im Stande, alle Sätze, die zunächst die Linien- und Zahlenverhältnisse betreffen, allgemein zu beweisen, und auf diese Weise eine allgemein gültige Theorie über das Messen der Größen überhaupt zu geben.

Zusatz 1. Alle Verhältnisse der Gleichheit sind gleiche Verhältnisse.

Zusatz 2. Wenn 2 Verhältnisse einem

---

es, nicht eben die Rechnung, sondern die Natur des Verhältnisses und die Deutlichkeit, zu setzen: a : b = sin . A : sin . B.

dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.

Zusatz 3. Das Zahlenverhältniß bleibt ungeändert, man mag beide Glieder mit einer dritten Zahl multipliciren, oder durch dieselbe Zahl dividiren, die neuen Verhältnisse sind nämlich jenen ersten gleich.

Zusatz 4. Da also das formularische Zahlenverhältniß ae : a auch gleich e : 1 ist, jedes Verhältniß aber entweder an und für sich, oder durch Anwendung des Maßes auf die verglichenen Größen, unter der Formel „ae : a" steht (§. 2. Zus. 7.): so erhellt, daß jedes Verhältniß auf das Verhältniß e : 1, d. i. des Exponenten zur Einheit, gebracht werden könne. In dieser Formel erscheint die zweite Größe als die Maßeinheit selbst, womit die erste Größe gemessen wird, und der Exponent e als das aus dieser Messung der gleichartigen, im vorgegebenen Verhältnisse betrachteten, Größen gefundene Resultat.

Zusatz 5. Wenn von 4 gleichartigen, also auf dasselbe Maß bezogenen, Größen A, B, C, D die Größen A, B sich z. B wie 6 : 3, und die Größen C, D wie — 4 : — 2 zu einander verhalten: so sind wegen desselben Exponenten beide Verhältnisse gleich, oder, weil A die Größe B um das eben so Vielfache übertrifft, als C die Größe D, die 4 Größen proportional. Die Zeichen haben also hier keinen Einfluß auf eine Aenderung der Exponenten jener Verhältnisse; allein sie sind uns ein Merkmal, daß

zwar jene 4 Größen wegen des einerlei Maßes, auf das sie, wie wir setzen, bezogen sind, zu demselben Systeme von Größen gehören, dieses System aber gleichsam aus 2 Theilen bestehe, deren einer diejenigen Größen befaßt, die in Beziehung auf die Größen des andern Theiles desselben Systems den Charakter der Entgegensetzung haben, so, daß folglich z. B. die ersteren Größen den letzteren Größen zwar in Betreff ihrer absoluten Quantität gleich sind, aber nur in sofern Realität haben, als eben diese letzteren Größen aufhörten zu seyn, oder durch Null durchgiengen und nach diesem Durchgange ein zufälliges Attribut erhielten, wodurch sie den Charakter der Entgegensetzung (wie + a, — a) annahmen.

Statt beide Theile des einen Systems auf dieselbe und zwar, wie man mit Recht bei allem Messen stillschweigend annimmt, auf dieselbe + Maßeinheit zu beziehen, erhält man offenbar dasselbe Resultat, wenn man den einen Theil des Systems auf eine + Maßeinheit, und den anderen Theil auf eine — Maßeinheit von derselben absoluten Quantität, wie die des ersten Theiles, bezieht. Bei dem Vergleichen der Größen in Verhältnissen hat diese Betrachtungsart den Vortheil, daß es klar erkannt wird, daß jene Zeichenänderung in der Bestimmung der relativen Quantität der Größen keine Aenderung hervorbringe.

Zusatz 6. Wenn sich daher 2 gleichartige Größen A, D zu einander verhalten,

wie z. B. 6 : — 2, so erkennt man, daß die Größe A zu demjenigen Theile des Systems gehöre, dessen Größen auf eine + Maßeinheit bezogen werden, D aber eine Größe desjenigen Theiles desselben Systems von Größen sey, welchem eine — Maßeinheit von derselben absoluten Quantität, wie die der vorigen + Maßeinheit, zum Grunde liegt. Nun ist dieselbe absolute Quantität 3mal mehr in A, als in D, wiederholt, folglich erkennt man, daß die Größe A 3mal größer, als D, sey. Der Exponent des Verhältnisses bleibt also auch hier positiver Ausdruck der relativen Quantitätsbestimmung.

Allein man lasse die Größe A aus D entspringen, berücksichtige die Entgegensetzung beider Maßeinheiten und gebe, weil diese Entgegensetzung nicht verschwindet, dem Exponenten 3 des Verhältnisses, als Resultate der Messung, das Zeichen — : was kann hiedurch angezeigt werden? Nichts anders, als daß zwar die Maßeinheit, so wie sie in D enthalten ist, zur Erzeugung der Größe A 3mal mehr wiederholt werden mußte, daß aber die Größe A zu demjenigen Theile desselben Systems von Größen gehöre, welchem eine + Maßeinheit von derselben absoluten Quantität, wie die der Größe D, zum Grunde liege.

Auf gleiche Weise, wenn man z. B. hätte A : D = — 6 : 2, und man gäbe dem Exponenten 3, ob er gleich positiver

Ausdruck der relativen Quantität jener verglichenen Größen ist, das Zeichen —, würde hiedurch angedeutet, daß zwar die Maßeinheit, wie sie in D, als aus welcher Größe die Größe A erzeugt gedacht wird, enthalten ist, 3mal mehr in A wiederholt sey, diese Größe aber zu einem Theile desselben Systems von Größen gehöre, welchem eine entgegengesetzte Maßeinheit von derselben absoluten Quantität, wie in Ansehung der Größe D, zum Grunde liege.

Zusatz 7. Der Exponent des Verhältnisses ist also seiner Natur nach immer eine unbenannte (§. 2. Zus. 3.) positive Zahl, und das ihm beigesetzte Zeichen — hat nur die Bedeutung, daß die im Verhältnisse betrachteten Größen selbst entgegengesetzt seyen, d. i. daß die Größe A, die man sich aus der andern B mittels der dieser zukommenden Maßeinheit erzeugt vorstellt, zu den mit B gleichartigen Größen gezählt werden müsse, welchen die entgegengesetzte Maßeinheit von derselben absoluten Quantität, wie die für B, zum Grunde liegt. So verhält sich z. B. der Cosinus von 180° zum Cosin. von 60°, wie — 1 zu 0, 5, und der Exponent — 0, 5 oder — $\frac{1}{2}$ zeigt an, daß der erste Cosinus den letzten um die Hälfte übertreffe, aber eine dem Cos. von 60° entgegengesetzte Lage habe. Wobei man sieht, daß es offenbar auf Eins hinauslaufe, wenn man sich im Systeme der Cosinusse die Cosinusse im 1. und 4. Quadranten auf + 1, und die im

2. und 3. Quadranten auf — 1 bezogen vorstellt *).

Zusatz 8. Es sind also Verhältnisse, wie 6 : — 2; — 6 : 2 einander gleich, oder, wie Hausen sich (S. 21. Elem. Mathes.) ausdrückt: es ist 1 : — 1 = — 1 : 1, oder + A : — B = — C : + D, oder — A : + B = + C : — D, *modo A, B, C, D alias sint proportionales.*

Anmerkung 1. Das Entstehen solcher Verhältnisse, wie — 6 : 2, 6 : — 2, — 6 : — 2 hat Hausen (S. 19. 20. des cit. B.) aus dem Verhältnisse 6 : 2 dadurch erklärt, daß man sich z. B. das zweite Glied 2 ins Unendliche abnehmend und verschwindend denke, so, daß das Verhältniß 6 : 2 selbst verschwinde, und nun durch die über Null hinaus fortgesetzt gedachte Abnahme desselben Gliedes, wodurch Zahlen wie — $\frac{1}{2}$, — 1, — 2 . . . zum Vorscheine kommen, das Verhältniß 6 : — 2, also aus dem positiven Verhältnisse selbst (wie es Hausen nennt), bei dessen Verschwindung, das opponirte Verhältniß nothwendig entspringe.

Man sieht, daß Hausen ganz von derselben Vorstellung der Entgegensetzung der Größen geleitet wurde, wie wir sie den vorigen Zusätzen zum Grunde legten, nur daß wir nicht, wie Hausen, von Zahlenverhältnissen selbst, sondern von den in Verhältnissen verglichenen Größen überhaupt ausgiengen.

---

*) Auf derselben Idee beruht das, was Kästner in den Anfangsgr. der Arithm. S. 67 u. f. beweist.

Anmerkung 2. Inwiefern das Dividiren ebenfalls ein Bestimmen des Vielfachen ist, um welches die eine der gegebenen Größen die andere übertrifft, ist auch der Quotient seiner Natur nach immer positiv und das ihm beigesetzte Zeichen (—) kann keine andere Bedeutung haben, als die, welche es bei dem Exponenten des Verhältnisses hat. Nimmt man noch hinzu, daß z. B. in $\frac{6}{-2}$ der Quotient — 3 nicht durch wiederholtes Abziehen der Zahl — 2 von der Zahl 6 gefunden werden kann: so findet man Hausen gerechtfertigt wenn er 1) die Erklärung der Division auf Verhältnisse baut, so definirend: divisio est, qua unius datorum B aufertur ex alio A, quidquid ejus in A inest, et fit aliquis Q, quotiens dictus, qui ad unitatem V sit, ut A ad B *); — 2) die Regeln in Betreff des Zeichens des Produkts und des Quotienten consequent aus der Theorie des Verhältnisses ableitet, indem er z. B. sagt **): in divisione est Q : 1 = A : B, unde si habentur + A, — B, erit + A : — B = — Q : 1 (Zus. 8.), u. s. w.

§. 8. Erklärung 10. nach Euklid (lib. V. def. 7.): ὅταν δὲ ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μεν του πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τὸ του δευτέρου πολλαπλάσιον, τὸ δὲ του τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τὸ του τέταρτου πολλαπλάσιον, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δευτέρον μεῖζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον; — nach der Uebersetzung: cum

---

*) Elem. Mathes. pag. 4. **) Pag. 21.

vero aeque multiplicium multiplex primae magnitudinis excesserit multiplicem secundae; at multiplex tertiae non excesserit multiplicem quartae; tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

Die neueren Mathematiker drücken dieses kurz und richtig so aus: von zwei ungleichen Verhältnissen (§. 7.) ist das das größere, welches den größeren Exponenten hat *).

Zusatz 1. Es ist also das größere Verhältniß auch um das Ebensovielfache größer, als das kleinere Verhältniß, um das Wievielfache sein Exponent den Exponenten des letzteren Verhältnisses übertrifft.

Beispiel 1. Wenn 2 Menschen im Verhältnisse 1 : 2 theilen, so theilen 8 Menschen dasselbe Vermögen im Verhältnisse 1 : 8; d. i. jeder aus den Zweien erhält die Hälfte, und jeder aus den Acht erhält den 8ten Theil des Ganzen; oder der Antheil Eines aus den Zweien verhält sich zum Antheile Eines aus den Acht, wie die Exponenten jener Verhältnisse, in welchen jene Zwei und diese Acht theilen, nämlich wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$, oder (indem man mit 16 multiplicirt, §. 7. Zus. 3.) wie 8 : 2, oder wie 4 : 1; d. i. die 2 Menschen theilen in einem 4mal größeren Verhältnisse dasselbe Ganze, als die 8 Menschen.

---

*) Vergl. z. B. Schulz's kurzen Lehrbegr. der Arithm. rc. S. 106.

Beispiel 2. Wenn sich 2 gerade Linien A, B, zu einander verhalten, wie 2 : 1, aber 2 andere gerade Linien C, D, auf dasselbe Maß, wie A, B, bezogen, sich zu einander verhalten, wie 6 : 1, und man untersucht, ob die ersten oder diese zweiten Linien in einem größeren Verhältnisse zu einander stehen: so bestimmt man die relative Quantität ihrer Verhältnisse. Dieses geschieht dadurch, daß man vorerst die Exponenten der Zahlenverhältnisse aufsucht, die man sowohl für A : B, als für C : D erhält, indem man diese Größen an dasselbe Maß hält; dann diese, die relativen Quantitäten jener Größen ausdrückenden, Exponenten miteinander vergleicht. Weil nun der Annahme zu Folge der Exponent 6 in 6 : 1 3mal größer ist, als der Exponent 2 in 2 : 1, so weiß man, daß das Verhältniß C : D 3mal größer sey, als das Verhältniß A : B, oder mit andern Worten, daß die geraden Linien C, D in einem 3mal größeren Verhältnisse zu einander stehen, als die Linien A, B.

Zusatz 2. So oft man also die Bestimmung der relativen Quantität zweier Verhältnisse im Auge hat, so gilt die Wahrheit: Verhältnisse verhalten sich zueinander, wie ihre Exponenten, ganz in dem Sinne, wie man spricht: Verhältnisse sind gleich, oder haben einerlei Quantität, wenn ihre Exponenten gleich sind, oder wenn das Verhältniß ihrer Exponenten ein Verhältniß der Gleichheit ist.

vero aeque multiplicium multiplex primae magnitudinis excesserit multiplicem secundae; at multiplex tertiae non excesserit multiplicem quartae; tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

Die neueren Mathematiker drücken dieses kurz und richtig so aus: von zwei ungleichen Verhältnissen (§. 7.) ist das das größere, welches den größeren Exponenten hat *).

Zusatz 1. Es ist also das größere Verhältniß auch um das Ebensovielfache größer, als das kleinere Verhältniß, um das Wievielfache sein Exponent den Exponenten des letzteren Verhältnisses übertrifft.

Beispiel 1. Wenn 2 Menschen im Verhältnisse 1 : 2 theilen, so theilen 8 Menschen dasselbe Vermögen im Verhältnisse 1 : 8; d. i. jeder aus den Zweien erhält die Hälfte, und jeder aus den Acht erhält den 8ten Theil des Ganzen; oder der Antheil Eines aus den Zweien verhält sich zum Antheile Eines aus den Acht, wie die Exponenten jener Verhältnisse, in welchen jene Zwei und diese Acht theilen, nämlich wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$, oder (indem man mit 16 multiplicirt, §. 7. Zus. 3.) wie 8 : 2, oder wie 4 : 1; d. i. die 2 Menschen theilen in einem 4mal größeren Verhältnisse dasselbe Ganze, als die 8 Menschen.

---

*) Vergl. z. B. Schulz's kurzen Lehrbegr. der Arithm. rc. S. 106.

Beispiel 2. Wenn sich 2 gerade Linien A, B, zu einander verhalten, wie 2 : 1, aber 2 andere gerade Linien C, D, auf dasselbe Maß, wie A, B, bezogen, sich zu einander verhalten, wie 6 : 1, und man untersucht, ob die ersten oder diese zweiten Linien in einem größeren Verhältnisse zu einander stehen: so bestimmt man die relative Quantität ihrer Verhältnisse. Dieses geschieht dadurch, daß man vorerst die Exponenten der Zahlenverhältnisse aufsucht, die man sowohl für A : B, als für C : D erhält, indem man diese Größen an dasselbe Maß hält; dann diese, die relativen Quantitäten jener Größen ausdrückenden, Exponenten miteinander vergleicht. Weil nun der Annahme zu Folge der Exponent 6 in 6 : 1 3mal größer ist, als der Exponent 2 in 2 : 1, so weiß man, daß das Verhältniß C : D 3mal größer sey, als das Verhältniß A : B, oder mit andern Worten, daß die geraden Linien C, D in einem 3mal größeren Verhältnisse zu einander stehen, als die Linien A, B.

Zusatz 2. So oft man also die Bestimmung der relativen Quantität zweier Verhältnisse im Auge hat, so gilt die Wahrheit: Verhältnisse verhalten sich zueinander, wie ihre Exponenten, ganz in dem Sinne, wie man spricht: Verhältnisse sind gleich, oder haben einerlei Quantität, wenn ihre Exponenten gleich sind, oder wenn das Verhältniß ihrer Exponenten ein Verhältniß der Gleichheit ist.

Zusatz 3. Es ist also der Ausdruck: „Größe oder Quantität des Verhältnisses," bezogen auf ein einzelnes Verhältniß, entweder sinnlos, oder er fällt mit der Bedeutung der relativen Quantität der im Verhältnisse verglichenen Größen, d. i. mit der Bedeutung des Exponenten zusammen. Soll daher jener Ausdruck einen Sinn und eine differente Bedeutung haben, so deutet er nur den Akt des Vergleichens kurz an, wodurch wir die relative Quantität zweier Verhältnisse mit Hilfe einer gleichartigen Maßeinheit entweder bestimmt haben, oder bestimmen sollen.

Anmerkung. Wie der Mathematiker vorerst einzelne Größen mit einander vergleicht, so vergleicht er auf dem Wege fernerer Forschung auch selbst Verhältnisse miteinander. Diese Aehnlichkeit des Vergleichpunktes wollte Hausen ausdrücken, indem er die Verhältnisse quantitates sui generis nannte. Da ich nicht gefunden habe, daß Mathematiker vor Purbach Zweifel über diesen Gegenstand erregt hätten, so war es für mich um so merkwürdiger, in dem oben angeführten Buche folgende Bemerkung Purbach's, die er unmittelbar der Erklärung des Verhältnisses folgen läßt, zu lesen: „Et non credas istam habitudinem terminorum esse distinctam a terminis, sed est *) termini illo modo ad se habentes." Klar wird

*) In meinem Exemplare ist über est das Wort sunt von fremder Hand geschrieben.

hiedurch ausgedrückt, daß die Quantität des Verhältnisses von der relativen Quantität seiner Glieder nicht verschieden sey, daß folglich die relative Quantität der Verhältnisse auch nur durch die relative Quantität ihrer Exponenten bestimmt werden könne. Und in der That, wenn man aus dem Begriffe des Verhältnisses die verglichenen Größen (termini) und ihre relative Quantitätsbestimmung wegdenkt, so, daß nur noch das Wort „habitudo“ stehen bleibt, wozu kann dieses Wort dem Mathematiker weiter dienen? oder was soll ihm quantitas habitudinis bedeuten? Gregor. a St. Vinc. vergleicht in der oben angeführten Abhandlung die Verhältnisse im Sinne der vorigen Zusätze, und Kästner *) bemerkt in dieser Beziehung: „man hat seitdem Größe der Verhältniß in einer andern Bedeutung genommen.“ In welcher Bedeutung? sagt er nicht; es wird dieses sich weiter unten ergeben, wie auch, daß man es zur bequemeren Darstellung der Logarithmentheorie thun zu müssen glaubte. In demselben Sinne, wie Kästner, hat Thibaut in seiner zur Erlangung der Doktorswürde geschriebenen Abhandlung **) hinsichtlich der Behauptung d' Alembert's „logarithmos non esse rationum mensuras“ bemerkt: „miscens ut videtur quantitatem rationis cum „quantitate, quam exprimit ratio.“ Was dachte wohl Thibaut bei dieser subtilen Distinktion?

*) Geschichte der Mathem. Th. 3. S. 239.

**) Dissertatio historiam controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos sistens. Göttingae 1797. Pag. 15.

§. 9. Die geänderten Verhältnisse.

Erklärung 11. Jedes Verhältniß B, das aus einem gegebenen A dadurch entsteht, daß man mit den Gliedern von A eine Veränderung vornimmt, heißt geändertes Verhältniß (ratio variata); in Beziehung auf B kann man A überhaupt das ordentliche (ratio invariata) nennen.

Schon Euklid, um sich kurz und doch verständlich auszudrücken, d. i. um nicht jedesmal die bestimmte Funktion der Veränderung beschreiben zu müssen, hat unter den Definitionen des V. Buch. der Elem. auch den geänderten Verhältnissen passende Namen gegeben, welche von den Mathematikern im gleichen Sinne beibehalten wurden. Diese Namen sind folgende:

1) das umgekehrte, indirekte Verhältniß (ἀνάπαλιν λόγος, ratio indirecta, reciproca — Aenderung durch Umkehrung, oder kurz: invertendo), wenn man aus a : b macht b : a.

Anmerkung. Man hüte sich, des von mehreren Mathematikern gewählten Ausdruckes „ratio reciproca est directae negativa“ geradehin sich zu bedienen, weil dieser Ausdruck nebst der allgemeinen Bedeutung des Gegentheiles auch eine arithmetische Entgegensetzung beider Verhältnisse ausspricht, die nicht Statt findet. Denn das Beiwort „umgekehrt“ ist zunächst nichts, als die Bezeichnung des die bestimmte Aenderung eines vorgegebenen Verhältnisses bewirkenden Aktes, und der

Grund dieses vorzunehmenden Aktes ist kein anderer, als der, daß wahrhaft gleiche Verhältnisse erzeugt werden. Z. B. wenn man sagt: 2 Brüche mit einerlei Zähler, aber verschiedenen Nennern, sind im umgekehrten Verhältnisse ihrer Nenner: so will man hiemit ausdrücken, daß man statt dem Verhältnisse des ersten Bruches zum zweiten auch das Verhältniß des zweiten Nenners zum ersten substituiren könne, nicht aber geradezu das Verhältniß auch des ersten Nenners zum zweiten. Die Opposition haftet also hier (beim Ausdrucke „direktes, indirektes" Verh.) an den Beziehungsprädikaten, durch welche entgegengesetzte Operationen angedeutet werden, keineswegs aber an solchen diesen Verhältnissen, aufeinander bezogen, zukommenden Attributen, durch welche die Verhältnisse selbst das Merkmal der arithmetischen Entgegensetzung erhalten. Denn das umgekehrte Verhältniß entsteht nicht durch das Verschwinden des ordentlichen Verh., sondern wenn dieses Statt findet, kann nicht jenes, und umgekehrt, Statt finden wegen der entgegengesetzten Operationen. So lassen uns diese z. B. aus $x^0 = 1$ so fort schließen, daß umgekehrt $\sqrt[0]{1} = x$, d. i. gleich einer unbestimmten Zahl, daher $\sqrt[0]{x}$ unmöglich sey, wenn x nicht $= 1$ ist. Auch sind durch $\sqrt{a}$ und $a)^2$ entgegengesetzte Operationen angedeutet, darum ist aber nicht $\sqrt{a} = -(a)^2$, wie $a)^2$ nicht $= -(\sqrt{a})$. Eben so wenig ist auch $(b : a) = -(a : b)$, auf welche Gleichstellung doch der obige Ausdruck führen könnte. Ein

Anderes ist es, wenn wir z. B. die Verminderung eine negative Vermehrung nennen. Denn sobald man sich denkt, daß die Vermehrung einer Größe X immer kleiner und kleiner werde, so kann dieselbe durch die Einbildungskraft auch über Null hinaus abnehmend gefaßt werden, wodurch sie nun als negative Vermehrung, d. i. als Verminderung erscheinen muß. Dieses ist aber nicht der Fall mit dem umgekehrten Verhältnisse und seinem Gegentheile.

2) Das durch Addition oder Subtraktion der Glieder entstandene Verhältniß (σύνθεσις, — διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις etc., — kurze Bezeichnung der Aenderung durch „addendo vel subtrahendo"), wenn man aus a : b macht a ± b : b. Allein wenn a : b = c : d ist, so ist auch a ± b : a = c ± d : c. Clavius übersetzt: *compositio* und *divisio* rationis; wie auch Hausen sagt: *componendo*, — *dividendo*. Die allgemeinen Ausdrücke „συνθεσις und διαιρεσις" entsprechen unseren ebenfalls allgemeinen oder generischen Ausdrücken „Verbindung oder Trennung der Bestandtheile einer Sache oder eines Ganzen." Daher lernt man ihre bestimmte Bedeutung nur durch die Definition des Gegenstandes kennen, von welchem eben die Rede ist. Aber nach der Euklid'schen Definition geschieht die fragliche Aenderung, als Verbindung, durch Addition, und dieselbe, als Trennung, durch Subtraktion der Glieder oder Bestandtheile des Verhältnisses,

folglich bezeichnet der Ausdruck „addendo vel subtrahendo“ einzig richtig die nach jenen Difinitionen vorzunehmenden Aenderungen der Verhältnisse. An eine eigentliche Multiplikation und Division ist hiebei nicht zu denken.

Anmerkung. Hausen und Schulz führen eine Aenderung von seltnerem Gebrauche an, die sie durch „antecedentes et consequentes summando vel differentiando“ bezeichnen, nämlich $a \pm c : b \pm d = a : b$. Von öfterer und nützlicherer Anwendung ist die zusammengesetzte Aenderung, die man durch „addendo simul ac subtrahendo“ bezeichnen kann, indem man macht $a + b : a - b = c + d : c - d$.

3) Das konvertirte oder zurückkehrende Verhältniß (ἀναστροφὴ λόγου etc., conversio rationis, — kurz: convertendo), wenn man macht $a : a - b$. Allein es ist auch $a : a \pm b = c : c \pm d$.

4) Das alternirte, verwechselte Verhältniß (συναλλὰξ λόγος, alterna ratio, — kurz: alternando, auch permutando s. vicissim), wenn man aus $a : b = c : d$ macht $a : c = b : d$.

Schlußanmerkung. Die übrigen von Euklid angeführten Erklärungen betreffen die Ableitung wahrer Proportionen aus vorgegebenen. Wenn wir aus $\begin{matrix}(a : b = m : n)\\(b : c = n : p)\end{matrix}$ machen $a : c = m : p$, so leiten wir diese Proportion ordinatim et ex aequo ab; macht man aber aus $\begin{matrix}(a : b = n : m)\\(b : c = p : n)\end{matrix}$ die Proportion $a : c = p : m$,

so ist diese perturbatim et ex aequo abgeleitet. Auf ähnliche Weise, wenn mehrere ähnliche Proportionen gegeben sind.

§. 10. Erklärung 12. nach Euklid (lib. VI. def. 5.) λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον; — nach der Uebersetzung: ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatae aliquam effecerint rationem.

Erörterung 1. den Ausdruck „αἱ πηλικότητες τῶν λόγων" betreffend.

Darüber ist bei den Mathematikern kein Streit, daß gegebene Verhältnisse dadurch zusammengesetzt werden, daß man ihre Vorderglieder miteinander und eben so ihre Hinterglieder miteinander multiplicirt, daß demnach das Verhältniß des ersten Produkts zum zweiten das zusammengesetzte Verhältniß sey. Dem zu Folge drücke sowohl A : B, als C : D das Verhältniß zweier gleichartigen Größen aus, und die ihnen entsprechenden formularischen Verhältnisse seyen e : 1 und m : 1 (§. 7. Zus. 4): so hat man durch Zusammensetzung AC : BD gleich em : 1; auf gleiche Weise, wenn mehrere Verhältnisse zur Composition gegeben wären. Es ist also allgemein der Exponent des durch Zusammensetzung gegebener Verhältnisse entstandenen Verhältnisses das Produkt aus den Exponenten der gegebenen Verhältnisse.

Der Alexandriner Theon, berühmt sowohl durch seine Commentare über Eu-

klid's Elemente und über das Almagest, als durch das Schicksal seiner gelehrten Tochter Hypatia, fast gleichzeitig (er lebte am Ende des 4. Jahrh. n. Chr. G.) mit Pappus, dessen Collect. mathem. ebenfalls als Commentar über die Elemente gewissermaßen betrachtet werden können, drückt Euklid's Definition so aus: λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων σύγκεῖσθαι λὲγεται, ὃταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινὰ πηλικότητα λόγου *), und erläutert dieses durch das Beispiel: wenn sich die gerade Linie A zur Linie B, wie 2 : 1, und die Linie B zur Linie C, wie 3 : 1 verhält, so ist das Verhältniß der Linie A zur Linie C ein aus den Verhältnissen A : B und B : C zusammengesetztes, d. i. die Quantität des Verhältnisses A : B, multiplicirt mit der Quantität des Verhältnisses B : C, macht die Quantität des Verhältnisses A : C. Oder die ratio dupla mit einer tripla komponirt, giebt die ratio sexdupla, d. i. A : C, wie 6 1 **). In demselben Sinne drückt sich Pirbach aus: „additionis proportio

---

*) Dieses und andere Scholien Theon's findet man in dem zu Basel 1533 gedruckten Werke: Ευκλειδου στοιχειων βιβλ. ἐκ των Θεωνος συνουσιων, aus dem wir den Text der Euklid'schen Erkl. nehmen.

**) Vergl. S 533. des oben cit. Comment. des Clavius, der sich auf Theon's Interpreten, Zambert, beruf.

est antecedentis et consequentis per antecedens et consequens, vel denominationis unius proportionis per denominationem alterius multiplicatio."

So erhellt denn klar, daß die πηλικοτητες τ. λ. bei den älteren Mathematikern keine andere Bedeutung haben, als die der Exponenten der Verhältnisse bei den neueren Mathematikern, daß folglich dieser Ausdruck denselben Sinn habe, wie in der Defin. Euklid's im 1. §., oder daß der Ausdruck „Größe des Verhältnisses" keine differente Bedeutung von „relativer Größe der im Verhältnisse betrachteten Größen" (§. 8. Zus. 1. 2. 3.) zulasse.

Noch bemerken wir ausdrücklich, daß die Erklärung (§. 10.) allgemein sey, oder die Zusammensetzung weder auf eine bestimmte Anzahl gegebener Verhältnisse, noch auf bestimmte gleiche oder ungleiche, Verhältnisse beschränkt werde.

Erörterung 2. den Ausdruck „συγκεῖσθαι" betreffend.

Man kann die Frage stellen: ist die Funktion des Zusammensetzens gegebener Verhältnisse eine Addition oder Multiplikation eben dieser Verhältnisse? Denn, wie schon Hindenburg bemerkt hat, daraus, daß bei der Zusammensetzung die Exponenten der gegebenen Verhältnisse multiplicirt werden, scheint noch nicht nothwendig zu folgen, daß auch die Verhältnisse selbst miteinander multiplicirt seyen. Die Beantwortung jener Frage hat übrigens keinen Einfluß auf die

Bestimmung des zusammengesetzten Verhältnisses; es wird nämlich aus A : B und B : C auf obige Weise immer gefunden A : C, man mag nun schreiben (A : B) + (B : C), oder (A : B) × (B : C). Die Beantwortung entscheidet also zunächst nur über die richtige Bezeichnung, wobei es dem Mathematiker nicht gleichgültig seyn kann, zu wissen, ob das Zusammensetzen der Verhältnisse eine ursprüngliche Funktion des Addirens und demnach die Dekomposition eine ursprüngliche Funktion des Subtrahirens, oder ob ersteres eine Funktion des Multiplicirens und letzteres eine Funktion des Dividirens sey.

Daß der Ausdruck „συγκεῖσθαι“ an und für sich nicht entscheidend sey, haben wir oben zu 2. im §. 9. schon bemerkt; er bestimmt nur, daß die gegebenen Verhältnisse im zusammengesetzten Verhältnisse als Bestandtheile (synthesirt) enthalten seyen. So bedeutet in „συνθετος αριθμος“ (lib. VII. def. 13.) das Prädikat eine Multiplikation der Bestandtheile der zusammengesetzten Zahl, wie 6 = 3. 2; aber es ist eine Addition angezeigt, wenn Euklid (lib. VII. def. 2.) die Zahl „τὸ ἐκ μονάδων συγκειμενον πλῆθος“ (ex unitatibus composita multitudo) nennt. Theon setzt am Schlusse seines vorhin erwähnten Scholions bei: „et manifestum est, quodsi a composita ratione quaevis una compositarum auferatur (ἀφαιρεθῇ), uno simplicium ejecto, reliqua compositarum assumitur“ (nach Lambert's Ueber=

est antecedentis et consequentis per antecedens et consequens, vel denominationis unius proportionis per denominationem alterius multiplicatio.“

So erhellt denn klar, daß die πηλικοτητες τ. λ. bei den älteren Mathematikern keine andere Bedeutung haben, als die der Exponenten der Verhältnisse bei den neueren Mathematikern, daß folglich dieser Ausdruck denselben Sinn habe, wie in der Defin. Euklid's im 1. §., oder daß der Ausdruck „Größe des Verhältnisses“ keine differente Bedeutung von „relativer Größe der im Verhältnisse betrachteten Größen“ (§. 8. Zus. 1. 2. 3.) zulasse.

Noch bemerken wir ausdrücklich, daß die Erklärung (§. 10.) allgemein sey, oder die Zusammensetzung weder auf eine bestimmte Anzahl gegebener Verhältnisse, noch auf bestimmte gleiche oder ungleiche, Verhältnisse beschränkt werde.

Erörterung 2. den Ausdruck „συγκεῖσθαι“ betreffend.

Man kann die Frage stellen: ist die Funktion des Zusammensetzens gegebener Verhältnisse eine Addition oder Multiplikation eben dieser Verhältnisse? Denn, wie schon Hindenburg bemerkt hat, daraus, daß bei der Zusammensetzung die Exponenten der gegebenen Verhältnisse multiplicirt werden, scheint noch nicht nothwendig zu folgen, daß auch die Verhältnisse selbst miteinander multiplicirt seyen. Die Beantwortung jener Frage hat übrigens keinen Einfluß auf die

Bestimmung des zusammengesetzten Verhältnisses; es wird nämlich aus A : B und B : C auf obige Weise immer gefunden A : C, man mag nun schreiben (A : B) + (B : C), oder (A : B) × (B : C). Die Beantwortung entscheidet also zunächst nur über die richtige Bezeichnung, wobei es dem Mathematiker nicht gleichgültig seyn kann, zu wissen, ob das Zusammensetzen der Verhältnisse eine ursprüngliche Funktion des Addirens und demnach die Dekomposition eine ursprüngliche Funktion des Subtrahirens, oder ob ersteres eine Funktion des Multiplicirens und letzteres eine Funktion des Dividirens sey.

Daß der Ausdruck „συγκεῖσθαι“ an und für sich nicht entscheidend sey, haben wir oben zu 2. im §. 9. schon bemerkt; er bestimmt nur, daß die gegebenen Verhältnisse im zusammengesetzten Verhältnisse als Bestandtheile (synthesirt) enthalten seyen. So bedeutet in „συνθετος ἀριθμος“ (lib. VII. def. 13.) das Prädikat eine Multiplikation der Bestandtheile der zusammengesetzten Zahl, wie 6 = 3. 2; aber es ist eine Addition angezeigt, wenn Euklid (lib. VII. def. 2.) die Zahl „τὸ ἐκ μονάδων συὺγκειμενον πλῆθος“ (ex unitatibus composita multitudo) nennt. Theon setzt am Schlusse seines vorhin erwähnten Scholions bei: „et manifestum est, quodsi a composita ratione quaevis una compositarum auferatnr (ἀφαιρεθῇ), uno simplicium ejecto, reliqua compositarum assumitur“ (nach Lambert's Ueber-

so ist diese perturbatim et ex aequo abgeleitet. Auf ähnliche Weise, wenn mehrere ähnliche Proportionen gegeben sind.

§. 10. Erklärung 12. nach Euklid (lib. VI. def. 5.) λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον; — nach der Uebersetzung: ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatae aliquam effecerint rationem.

Erörterung 1. den Ausdruck „αἱ πηλικότητες τῶν λόγων“ betreffend.

Darüber ist bei den Mathematikern kein Streit, daß gegebene Verhältnisse dadurch zusammengesetzt werden, daß man ihre Vorderglieder miteinander und eben so ihre Hinterglieder miteinander multiplicirt, daß demnach das Verhältniß des ersten Produkts zum zweiten das zusammengesetzte Verhältniß sey. Dem zu Folge drücke sowohl A : B, als C : D das Verhältniß zweier gleichartigen Größen aus, und die ihnen entsprechenden formularischen Verhältnisse seyen e : 1 und m : 1 (§. 7. Zus. 4): so hat man durch Zusammensetzung AC : BD gleich em : 1; auf gleiche Weise, wenn mehrere Verhältnisse zur Composition gegeben wären. Es ist also allgemein der Exponent des durch Zusammensetzung gegebener Verhältnisse entstandenen Verhältnisses das Produkt aus den Exponenten der gegebenen Verhältnisse.

Der Alexandriner Theon, berühmt sowohl durch seine Commentare über Eu-

klid's Elemente und über das Almagest, als durch das Schicksal seiner gelehrten Tochter Hypatia, fast gleichzeitig (er lebte am Ende des 4. Jahrh. n. Chr. G.) mit Pappus, dessen Collect. mathem. ebenfalls als Commentar über die Elemente gewissermaßen betrachtet werden können, drückt Euklid's Definition so aus: λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων σύγκεῖσθαι λὲγεται, ὃταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινὰ πηλικότητα λόγου *), und erläutert dieses durch das Beispiel: wenn sich die gerade Linie A zur Linie B, wie 2 : 1, und die Linie B zur Linie C, wie 3 : 1 verhält, so ist das Verhätniß der Linie A zur Linie C ein aus den Verhältnissen A : B und B : C zusammengesetztes, d. i. die Quantität des Verhältnisses A : B, multiplicirt mit der Quantität des Verhältnisses B : C, macht die Quantität des Verhältnisses A : C. Oder die ratio dupla mit einer tripla komponirt, giebt die ratio sexdupla, d. i. A : C, wie 6 1 **). In demselben Sinne drückt sich Pirbach aus: „additionis proportio

*) Diesesund andere Scholien Theon's findet man in dem zu Basel 1533 gedruckten Werke: Ευκλειδου στοιχειων βιβλ. ἐκ των Θεωνος συνουσιων, aus dem wir den Text der Euklid'schen Erkl. nehmen.

**) Vergl. S 533. des oben cit. Comment. des Clavius, der sich auf Theon's Interpreten, Zambert, beruf.

est antecedentis et consequentis per antecedens et consequens, vel denominationis unius proportionis per denominationem alterius multiplicatio.“

So erhellt denn klar, daß die πηλικοτητες τ. λ. bei den älteren Mathematikern keine andere Bedeutung haben, als die der Exponenten der Verhältnisse bei den neueren Mathematikern, daß folglich dieser Ausdruck denselben Sinn habe, wie in der Defin. Euklid's im 1. §., oder daß der Ausdruck „Größe des Verhältnisses" keine differente Bedeutung von „relativer Größe der im Verhältnisse betrachteten Größen" (§. 8. Zus. 1. 2. 3.) zulasse.

Noch bemerken wir ausdrücklich, daß die Erklärung (§. 10.) allgemein sey, oder die Zusammensetzung weder auf eine bestimmte Anzahl gegebener Verhältnisse, noch auf bestimmte gleiche oder ungleiche, Verhältnisse beschränkt werde.

Erörterung 2. den Ausdruck „συγκεῖσθαι“ betreffend.

Man kann die Frage stellen: ist die Funktion des Zusammensetzens gegebener Verhältnisse eine Addition oder Multiplikation eben dieser Verhältnisse? Denn, wie schon Hindenburg bemerkt hat, daraus, daß bei der Zusammensetzung die Exponenten der gegebenen Verhältnisse multiplicirt werden, scheint noch nicht nothwendig zu folgen, daß auch die Verhältnisse selbst miteinander multiplicirt seyen. Die Beantwortung jener Frage hat übrigens keinen Einfluß auf die

Bestimmung des zusammengesetzten Verhältnisses; es wird nämlich aus A : B und B : C auf obige Weise immer gefunden A : C, man mag nun schreiben (A : B) + (B : C), oder (A : B) × (B : C). Die Beantwortung entscheidet also zunächst nur über die richtige Bezeichnung, wobei es dem Mathematiker nicht gleichgültig seyn kann, zu wissen, ob das Zusammensetzen der Verhältnisse eine ursprüngliche Funktion des Addirens und demnach die Dekomposition eine ursprüngliche Funktion des Subtrahirens, oder ob ersteres eine Funktion des Multiplicirens und letzteres eine Funktion des Dividirens sey.

Daß der Ausdruck „συγκεῖσθαι" an und für sich nicht entscheidend sey, haben wir oben zu 2. im §. 9. schon bemerkt; er bestimmt nur, daß die gegebenen Verhältnisse im zusammengesetzten Verhältnisse als Bestandtheile (synthesirt) enthalten seyen. So bedeutet in „συνθετος ἀριθμος" (lib. VII. def. 13.) das Prädikat eine Multiplikation der Bestandtheile der zusammengesetzten Zahl, wie 6 = 3. 2; aber es ist eine Addition angezeigt, wenn Euklid (lib. VII. def. 2.) die Zahl „τὸ ἐκ μονάδων συγκειμενον πλῆθος" (ex unitatibus composita multitudo) nennt. Theon setzt am Schlusse seines vorhin erwähnten Scholions bei: „et manifestum est, quodsi a composita ratione quaevis una compositarum auferatnr (ἀφαιρεθῇ), uno simplicium ejecto, reliqua compositarum assumitur" (nach Lambert's Ueber-

setzung *). Wie Purbach, so scheint also auch Theon das Componiren der Verhältnisse als Funktion des Addirens betrachtet zu haben. —

Im Sinne dieser Mathematiker bezeichneten Hausen (Elem. Math. pag. 56.), Bärmann (bei Eukl. elem. lib. V. def. 5.), Kästner, Lorenz und Hindenburg (in der Vorrede zu den von Lempe herausgegebenen Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe, — in den Zusätzen hatte er die Bezeichnung (a : b) (b : c) = a : c vorgezogen) das Zusammensetzen der Verhältnisse durch das Additionszeichen. Aber Karsten und nach ihm mehrere Mathematiker, mehr den Zweck im Auge haltend, setzen die zu componirenden Verhältnisse ohne Zeichen untereinander. Doch sieht Karsten das Componiren der Verhältnisse als eigentliches Addiren an und beruft sich deshalb auf Kästner. Allein dieser sagt **) zur Rechtfertigung seiner Bezeichnung nichts, als daß a : c aus den Verhältnissen a : b, b : c bestehe, und zieht aus dieser willkührlichen Bezeichnung den Schluß, daß, weil $\frac{a}{c}$ nicht $= \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$ sey, die Verhältnisse von Quotienten unterschieden werden müßten.

---

*) Zambert, aus Venedig, übersetzte zuerst die Elementa und Data Euklid's ins Lateinische. Man findet diese Uebersetzungen in einer Basler Ausgabe (v. J. 1537) der Werke Euklid's.

**) S. 141 der Anfangsgr. in d. Anmerk.

Die Beantwortung der aufgestellten Frage ist indessen nicht so schwierig, als es scheint. Da weder der Ausdruck „συγκεῖσθαι“ (componi, connecti), noch die Autorität hier entscheidend ist: so muß man sein Augenwerk lediglich wieder auf den definirten Gegenstand selbst wenden. Zu diesem Ende denke man sich's erstens klar, was es heiße „doppeltes, dreifaches, ... Verhältniß (ratio dupla, tripla ..),“ wie 2 : 1, 3 : 1, ... wobei man sich diese Verhältnisse gleichsam als voneinander abgesöndert, oder nicht auseinander erzeugt vorstellt. Sie drücken überhaupt ein vorgenommenes bestimmtes Messen, oder eine relative Quantitätsbestimmung aus. Gleichwie nun aller Quantitätsbestimmung überhaupt eine Maßeinheit zum Grunde liegt, und durch 2a, 3a, ... nichts anders ausgedrückt wird, als daß die in a enthaltene Einheit in 2a, 3a ... 2mal, 3mal, ... größer genommen, oder 2mal, 3mal ... mehr wiederholt sey, als in a; eben so liegt jenen Verhältnissen 2 : 1, 3 : 1, ... abgesehen von den Größen, die sich wie 3 : 1, ... verhalten, das Verhältniß der Gleichheit 1 : 1 als Maßeinheit zum Grunde, und der Exponent, als Ausdruck der relativen Quantität, läßt erkennen, daß diese Maßeinheit im Verhältnisse 2 : 1 2mal genommen oder wiederholt sey, oder daß jene Verhältnisse 2mal, 3mal ... größer seyen, als das Verhältniß 1 : 1.

Zweitens. Man nehme, wie oben zu 1., an, daß A : B sich verhalte wie e : 1,

und C : D wie m : 1; lasse die Exponenten e und m der Deutlichkeit wegen ganze Zahlen bedeuten; setze einstweilen die Hypothese, daß das Componiren jener Verhältnisse ein Multipliciren derselben sey, und mache sich's nun klar, was es heissen könne: man soll (A : B) mit (C : D) multipliciren, dieses Wort in derselben Bedeutung genommen, welche ihm bei Zahlen, als Faktoren, zukömmt. Man wird antworten müssen: man solle das Verhältniß (A : B) oder die Quantität desselben, oder des ihm gleichen Verhältnisses e : 1 nach dem Gesetze des Verhältnisses (C : D) oder dessen Quantität, oder des ihm gleichen Verhältnisses m : 1 vervielfachen. Wenn man dieses nach dem, was wir so eben unter erstens und in der obigen Erörterung 1. gesagt haben, mit andern Worten ausdrückt: so heißt es nichts anders, als: man soll das in (e : 1) schon emal gesetzte oder wiederholte Maß (1 : 1) nach dem Gesetze vervielfachen, daß dieses Maß noch um das Sovielfache größer genommen werde, als wievielmal dasselbe Maß (1 : 1) im Verhältnisse (m : 1) gesetzt oder wiederholt ist. Nun erscheint dieses Maß in (m : 1) mmal gesetzt, also soll man das in (e : 1) schon emal genommene Maß (1 : 1) noch mmal, d. i. emmal nehmen. Folglich erhält man aus der Composition der gegebenen Verhältnisse (A : B), (C : D) oder der ihnen gleichen Verhältnisse (e : 1), (m : 1) das Verhältniß em : 1, oder das ihm gleiche Verh. AC : BD, in=

dem man die gegebenen Verhältnisse als Faktoren betrachtet. Nun soll aber nach Euklid's Definition ein aus gegebenen Verhältnissen komponirtes Verhältniß dasjenige seyn, dessen Exponent das Produkt der Exponenten der gegebenen Verhältnisse ist, oder die Worterklärung genetisch ausgedrückt: es soll ein aus gegebenen Verhältnissen zusammengesetztes Verhältniß dadurch entstehen, daß man das Produkt ihrer Exponenten in Verhältniß zur Einheit setzt. Genau dieses muß aber geschehen, wenn man die gegebenen Verhältnisse als Faktoren betrachtet, folglich ist das Componiren zweier Verhältnisse ein wahres Multipliciren derselben. Da dasselbe Räsonnement gültig ist, wie viele Verhältnisse zur Zusammensetzung auch immer gegeben, und welche Zahlen auch ihre Exponenten seyn mögen: so ist die ausgesprochene Wahrheit allgemein gültig.

Beispiel. Wenn man 2 Prismen P, p im Verhältnisse betrachtet, so will man wissen, um wievielmal das eine Prisma P größer sey, als das andere p. Setzt man nun die Höhe H des Prisma P verhalte sich zur Höhe h des Prisma p, wie 2 : 1, d. i. H sey = 2h: so verhält sich auch, wenn beider Prismen Grundflächen B, b gleich sind, P : p = 2 : 1, d. i. P ist 2mal größer als p. Sind aber H, h gleich, und ist B 3mal größer als b, so daß sich diese Grundflächen zu einander verhalten, wie 3 : 1, so ist auch P : p = 3 : 1, d. i. P

3mal größer, als p. Wenn folglich die Höhen sowohl, als die Grundflächen ungleich sind und jene und diese in den genannten Verhältnissen stehen: so ist das Prisma P nicht (2 + 3)mal, sondern (2 . 3)mal oder 6mal größer, als p; d. i. die Prismen verhalten sich zueinander, wie das Produkt der Quantitäten der Verhältnisse der Höhen und Grundflächen zur Einheit. Dieses nennt der Geometer kurz: die Prismen P, p sind im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Höhen und Grundflächen.

Zusatz 1. Die richtige Bezeichnung der Zusammensetzung der Verhältnisse ist also: $(A : B) \times (C : D) = AC : BD$; oder $(A : B)\ (B : C) = A : C$, u. s. w. Oder, wenn m, n, p . . . die Exponenten der Verhältnisse $A : B$, $C : D$, $E : F$ . . . sind, so ist das zusammengesetzte Verhältniß $= ACE : BDF = mnp : 1$.

Zusatz 2. Sind daher m, n ganze Zahlen, so ist das zusammengesetzte Verhält- AC : BD oder mn : 1 n^{mal} größer, als A : B oder als m : 1, und m^{mal} größer, als C : D oder als n : 1 (vergl. §. 8. Zus. 1).

Zusatz 3. Wie $1 . a = a$, so ist auch $(a : b)\ (1 : 1) = a : b$, oder jedes Verhältniß, componirt mit dem Verhältnisse der Gleichheit, bleibt ungeändert dasselbe.

Zusatz 4. Es ist $(a : b) \times (b : a) = ab : ab = 1 : 1$, d. i. das ordentliche Verhältniß, mit dem umgekehrten (§. 9.) multiplicirt, giebt das Verhältniß der Gleich-

heit oder die Maßeinheit selbst, aus welcher jene Verhältnisse oder ihre Quantitäten erzeugt gedacht werden. Allgemein: wenn m der Exponent eines vielfachen Verhältnisses, daher $\frac{1}{m}$ der Exponent des Gleichsubvielfachen Verhältnisses ist (§. 6. Anm.): so ist das aus beiden zusammengesetzte Verhältniß $= m \cdot \frac{1}{m} : 1 = 1 : 1$ wie $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, und das subvielfache Verhältniß ist das umgekehrte des gleichvielfachen Verhältnisses.

Zusatz 5. Die der Zusammensetzung gegebener Verhältnisse entgegengesetzte Operation, die man Decomposition nennen kann, ist also überhaupt eine Division, oder wird dadurch vollbracht, daß man entweder die Vorder- und Hinterglieder durcheinander dividirt, wie man kurz spricht, oder daß man den Exponenten des zu decomponirenden Verhältnisses durch den Exponenten des Verhältnisses dividirt, nach dessen Gesetze decomponirt werden soll. So ist $(ac : bd) : (c : d) = \frac{ac}{c} : \frac{bd}{d} = a : b$, oder $(mn : 1) : (n : 1) = m : 1$, und $a : b$ oder $m : 1$ das decomponirte Verhältniß.

Zusatz 7. Es erhellt, wie man Proportionen componire und durcheinander dividire.

Zusatz 8. Es ist $(1 : 1) : (1 : 1)$ wieder gleich $(1 : 1)$, wie $\frac{1}{1} = 1$; auch ist $(1 : 1) : (3 : 1)$ gleich $\frac{1}{3} : 1$, und allgemein: $(1 : 1) : (m : 1)$ (wo m eine ganze + Zahl außer der Einheit bedeutet) gleich

$\frac{1}{m}$: 1, oder gleich 1 : m. Hieraus erhellt 1), daß, gleichwie die Zahlenbrüche überhaupt durch Theilung der den Zahlen zum Grunde liegenden Einheit zum Vorscheine kommen, auf ähnliche Weise auch die Verhältnisse der kleineren Ungleichheit (§. 6.) aus der Decomposition der allen Verhältnissen, als solchen, zum Grunde liegenden Maßeinheit (1 : 1) entspringen; 2) daß man jedes umgekehrte Verhältniß dadurch entstanden denken könne, daß das Verhältniß (1 : 1) durch das jenem entsprechende direkte Verhältniß dividirt wird (vergl. Zus. 4.).

Zusatz 9. Vermöge Zus. 1. macht oder nimmt man also das Verhältniß e : 1, in welchem sich 2 gleichartige Größen A, B befinden, 2mal, 3mal . . . mmal größer, wenn man jenes Verhältniß und eine ratio dupla, 3pla . . . mtupla zusammensetzt. Denn dadurch hat man 2e : 1, 3e : 1, . . . me : 1, d. i. ein 2mal, 3mal, . . . mmal größeres Verhältniß, als e : 1, also giebt jene Operation die verlangte Vervielfachung. Sollte umgekehrt e : 1 2mal, 3mal, . . . mmal kleiner gemacht oder genommen werden, so müßte man das Verhältniß e : 1 mit einer ratio subdupla, . . . submtupla componiren; so ist (e : 1) (1 : 2) = e : 2, und (e : 1) (1 : m) = e : m. Aber der Exponent $\frac{e}{2}$ ist 2mal, und $\frac{e}{m}$ mmal kleiner, als e in e : 1, folglich auch das zusammengesetzte Verhältniß e : 2 2mal, und e : m mmal kleiner, als e : 1.

Allein es ist auch (e : 1) : (m : 1) (Zus. 5.) gleich $\frac{e}{m}$: 1 = e : m, also erhält man auch die *m*fache Verminderung eines Verhältnisses, wenn man dieses durch die ratio *m*tupla dividirt.

In e : 1 stellt e sowohl das erste Glied, als auch den Exponenten dieses Verhältnisses vor, folglich kann man auch sagen, man verdopple, . . . vermfache ein, auf eine andere Maßeinheit bezogenes, Verhältniß, indem man sein erstes Glied oder seinen Exponenten mit 2, . . . mit m multiplicire; und umgekehrt in Beziehung auf die mfache Verminderung.

Zusatz 10. Die richtige Bezeichnung betreffend. Wie man also eine Größe a 2mal, . . . mmal nimmt, oder durch Addition mit sich selbst wiederholt setzt, indem man schreibt 2a (= a + a), . . . ma, eben so ist 2 (1 : 1) = (1 : 1) + (1 : 1) = (1 : 1) (2 : 1) = (2 : 1), und m (e : 1) gleich me : 1. Eben so ist umgekehrt $\frac{1}{2}$ (1 : 1) = $\frac{1}{2}$: 1 = 1 : 2, . . . $\frac{1}{m}$ (1 : 1) = 1 : m. Daher denn auch 2 (a : b) = (a : b) + (a : b) = (a : b) (2 : 1) = 2a : b, u. s. w. Und eben so (a : b) + (c : d), oder, formularisch ausgedrückt, (e : 1) + (m : 1) = e (1 : 1) + m(1 : 1) = (e + m) (1 : 1) = e + m : 1. Daher denn auch umgekehrt: (a : b) — (c : d) = e — m : 1.

Anmerkung. Da das Addiren der Verhältnisse mit seinem Gegentheile, dem Subtrahiren,

für den Mathematiker, in wiefern er es mit dem Messen zu thun hat, durchaus von keinem Belange und keiner Anwendung ist: so liegt hierin der Grund, warum Euklid in jener Rücksicht keine Erklärungen gab, so wie diese Unterlassung für die späteren Mathematiker eine Veranlassung werden konnte, das Zusammensetzen der Verhältnisse für ein Addiren derselben zu halten.

Zusatz 11. Man setze A : C = e : 1 und B : C = m : 1, so verhält sich (e : 1) : (m : 1) = e(1 : 1) : m(1 : 1) [Zus. 10.] d. i. wie e : m, daher verhält sich auch (A : C) zu (B : C), wie A : B; d. i. Verhältnisse verhalten sich im Allgemeinen zueinander, wie ihre Exponenten, und ins Besondere, Verhältnisse, welche dasselbe Hinterglied haben, verhalten sich direkt zueinander, wie ihre Vorderglieder.

Allein man setze A : B = 1 : e und A : C = 1 : m, so verhält sich (1 : e) zu (1 : m) wie $\frac{1}{e}$ (1 : 1) zu $\frac{1}{m}$ (1 : 1) [Zus. 10.], d. i. wie $\frac{1}{e}$ zu $\frac{1}{m}$, oder wie m : e (Zus. 8.), daher verhält sich auch (A : B) zu (A : C), wie C : B, d. i. Verhältnisse mit demselben Vordergliede verhalten sich umgekehrt zueinander, wie ihre Hinterglieder.

Anmerkung. Gegen Gregor. a St. Vinc., der dieselben Behauptungen aufstellte *),

---

*) Satz 2. und 9. des ersten Theiles der Abh. „de proport. geom.“

bemerkte Hindenburg *): „und so würden sich, nach einer richtigen Folge, die Verhältnisse untereinander, wie ihre Exponenten verhalten. Ein offenbarer falscher Satz, wie die Prämissen (die obigen Sätze), aus denen er folgt. Die Vergleichung der Verhältnisse führt zu den Logarithmen, wie die Vergleichung der einzelnen Glieder in der Verhältniß zu den Exponenten. Hier sind also Verhältnisse und Exponenten von Gregorius miteinander verwechselt worden." Allein Hindenburg irrte: denn nur das Vergleichen der Verhältnisse untereinander, inwiefern sie auseinander, d. i. mittels eines der verglichenen Verhältnisse, das als Wurzel dient, erzeugt gedacht werden, führt auf die Logarithmen, keineswegs aber das Vergleichen der auf das Verhältniß der Gleichheit (1 : 1), als einziges Maß, bezogenen Verhältnisse. Nur auf diese Art des Vergleichens beziehen sich Gregor's Sätze und sind daher unstreitig wahr.

§. 11. Erklärung 13. 1) nach Euklid (lib. V. def. 10. 11.): ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. — Οταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ; — nach der Uebersetzung: cum autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur

*) In der Vorrede zu den oben angef. Erörterungen.

$\frac{1}{m}$: 1, oder gleich 1 : m. Hieraus erhellt 1), daß, gleichwie die Zahlenbrüche überhaupt durch Theilung der den Zahlen zum Grunde liegenden Einheit zum Vorscheine kommen, auf ähnliche Weise auch die Verhältnisse der kleineren Ungleichheit (§. 6.) aus der Decomposition der allen Verhältnissen, als solchen, zum Grunde liegenden Maßeinheit (1 : 1) entspringen; 2) daß man jedes umgekehrte Verhältniß dadurch entstanden denken könne, daß das Verhältniß (1 : 1) durch das jenem entsprechende direkte Verhältniß dividirt wird (vergl. Zus. 4.).

Zusatz 9. Vermöge Zus. 1. macht oder nimmt man also das Verhältniß e : 1, in welchem sich 2 gleichartige Größen A, B befinden, 2mal, 3mal . . . mmal größer, wenn man jenes Verhältniß und eine ratio dupla, 3pla . . . *m*tupla zusammensetzt. Denn dadurch hat man 2e : 1, 3e : 1, . . . me : 1, d. i. ein 2mal, 3mal, . . . mmal größeres Verhältniß, als e : 1, also giebt jene Operation die verlangte Vervielfachung. Sollte umgekehrt e : 1 2mal, 3mal, . . . mmal kleiner gemacht oder genommen werden, so müßte man das Verhältniß e : 1 mit einer ratio subdupla, . . . submtupla componiren; so ist (e : 1) (1 : 2) = e : 2, und (e : 1) (1 : m) = e : m. Aber der Exponent $\frac{e}{2}$ ist 2mal, und $\frac{e}{m}$ mmal kleiner, als e in e : 1, folglich auch das zusammengesetzte Verhältniß e : 2 2mal, und e : m mmal kleiner, als e : 1.

Allein es ist auch (e : 1) : (m : 1) (Zus. 5.) gleich $\frac{e}{m}$: 1 = e : m, also erhält man auch die mfache Verminderung eines Verhältnisses, wenn man dieses durch die ratio *m*tupla dividirt.

In e : 1 stellt e sowohl das erste Glied, als auch den Exponenten dieses Verhältnisses vor, folglich kann man auch sagen, man verdopple, . . . vermfache ein, auf eine andere Maßeinheit bezogenes, Verhältniß, indem man sein erstes Glied oder seinen Exponenten mit 2, . . . mit m multiplicire; und umgekehrt in Beziehung auf die mfache Verminderung.

Zusatz 10. Die richtige Bezeichnung betreffend. Wie man also eine Größe a 2mal, . . . mmal nimmt, oder durch Addition mit sich selbst wiederholt setzt, indem man schreibt 2a (= a + a), . . . ma, eben so ist 2 (1 : 1) = (1 : 1) + (1 : 1) = (1 : 1) (2 : 1) = (2 : 1), und m (e : 1) gleich me : 1. Eben so ist umgekehrt $\frac{1}{2}$ (1 : 1) = $\frac{1}{2}$: 1 = 1 : 2, . . . $\frac{1}{m}$ (1 : 1) = 1 : m. Daher denn auch 2 (a : b) = (a : b) + (a : b) = (a : b) (2 : 1) = 2a : b, u. s. w. Und eben so (a : b) + (c : d), oder, formularisch ausgedrückt, (e : 1) + (m : 1) = e (1 : 1) + m(1 : 1) = (e + m) (1 : 1) = e + m : 1. Daher denn auch umgekehrt: (a : b) — (c : d) = e — m : 1.

Anmerkung. Da das Addiren der Verhältnisse mit seinem Gegentheile, dem Subtrahiren,

$\frac{1}{m}$: 1, oder gleich 1 : m. Hieraus erhellt 1), daß, gleichwie die Zahlenbrüche überhaupt durch Theilung der den Zahlen zum Grunde liegenden Einheit zum Vorscheine kommen, auf ähnliche Weise auch die Verhältnisse der kleineren Ungleichheit (§. 6.) aus der Decomposition der allen Verhältnissen, als solchen, zum Grunde liegenden Maßeinheit (1 : 1) entspringen; 2) daß man jedes umgekehrte Verhältniß dadurch entstanden denken könne, daß das Verhältniß (1 : 1) durch das jenem entsprechende direkte Verhältniß dividirt wird (vergl. Zus. 4.).

Zusatz 9. Vermöge Zus. 1. macht oder nimmt man also das Verhältniß e : 1, in welchem sich 2 gleichartige Größen A, B befinden, 2mal, 3mal . . . mmal größer, wenn man jenes Verhältniß und eine ratio dupla, 3pla . . . *m*tupla zusammensetzt. Denn dadurch hat man 2e : 1, 3e : 1, . . . me : 1, d. i. ein 2mal, 3mal, . . . mmal größeres Verhältniß, als e : 1, also giebt jene Operation die verlangte Vervielfachung. Sollte umgekehrt e : 1 2mal, 3mal, . . . mmal kleiner gemacht oder genommen werden, so müßte man das Verhältniß e : 1 mit einer ratio subdupla, . . . submtupla componiren; so ist (e : 1) (1 : 2) = e : 2, und (e : 1) (1 : m) = e : m. Aber der Exponent $\frac{e}{2}$ ist 2mal, und $\frac{e}{m}$ mmal kleiner, als e in e : 1, folglich auch das zusammengesetzte Verhältniß e : 2 2mal, und e : m mmal kleiner, als e : 1.

Allein es ist auch (e : 1) : (m : 1) (Zus. 5.) gleich $\frac{e}{m}$: 1 = e : m, also erhält man auch die mfache Verminderung eines Verhältnisses, wenn man dieses durch die ratio *m*tupla dividirt.

In e : 1 stellt e sowohl das erste Glied, als auch den Exponenten dieses Verhältnisses vor, folglich kann man auch sagen, man verdopple, . . . vermfache ein, auf eine andere Maßeinheit bezogenes, Verhältniß, indem man sein erstes Glied oder seinen Exponenten mit 2, . . . mit m multiplicire; und umgekehrt in Beziehung auf die mfache Verminderung.

Zusatz 10. Die richtige Bezeichnung betreffend. Wie man also eine Größe a 2mal, . . . mmal nimmt, oder durch Addition mit sich selbst wiederholt setzt, indem man schreibt 2a (= a + a), . . . ma, eben so ist 2 (1 : 1) = (1 : 1) + (1 : 1) = (1 : 1) (2 : 1) = (2 : 1), und m (e : 1) gleich me : 1. Eben so ist umgekehrt $\frac{1}{2}$ (1 : 1) = $\frac{1}{2}$: 1 = 1 : 2, . . . $\frac{1}{m}$ (1 : 1) = 1 : m. Daher denn auch 2 (a : b) = (a : b) + (a : b) = (a : b) (2 : 1) = 2a : b, u. s. w. Und eben so (a : b) + (c : d), oder, formularisch ausgedrückt, (e : 1) + (m : 1) = e (1 : 1) + m(1 : 1) = (e + m) (1 : 1) = e + m : 1. Daher denn auch umgekehrt: (a : b) — (c : d) = e — m : 1.

Anmerkung. Da das Addiren der Verhältnisse mit seinem Gegentheile, dem Subtrahiren,

$\frac{1}{m}$: 1, oder gleich 1 : m. Hieraus erhellt 1), daß, gleichwie die Zahlenbrüche überhaupt durch Theilung der den Zahlen zum Grunde liegenden Einheit zum Vorscheine kommen, auf ähnliche Weise auch die Verhältnisse der kleineren Ungleichheit (§. 6.) aus der Decomposition der allen Verhältnissen, als solchen, zum Grunde liegenden Maßeinheit (1 : 1) entspringen; 2) daß man jedes umgekehrte Verhältniß dadurch entstanden denken könne, daß das Verhältniß (1 : 1) durch das jenem entsprechende direkte Verhältniß dividirt wird (vergl. Zus. 4.).

Zusatz 9. Vermöge Zus. 1. macht oder nimmt man also das Verhältniß e : 1, in welchem sich 2 gleichartige Größen A, B befinden, 2mal, 3mal . . . mmal größer, wenn man jenes Verhältniß und eine ratio dupla, 3pla . . . mtupla zusammensetzt. Denn dadurch hat man 2e : 1, 3e : 1, . . . me : 1, d. i. ein 2mal, 3mal, . . . mmal größeres Verhältniß, als e : 1, also giebt jene Operation die verlangte Vervielfachung. Sollte umgekehrt e : 1 2mal, 3mal, . . . mmal kleiner gemacht oder genommen werden, so müßte man das Verhältniß e : 1 mit einer ratio subdupla, . . . submtupla componiren; so ist (e : 1) (1 : 2) = e : 2, und (e : 1) (1 : m) = e : m. Aber der Exponent $\frac{e}{2}$ ist 2mal, und $\frac{e}{m}$ mmal kleiner, als e in e : 1, folglich auch das zusammengesetzte Verhältniß e : 2 2mal, und e : m mmal kleiner, als e : 1.

Allein es ist auch (e : 1) : (m : 1) (Zus. 5.) gleich $\frac{e}{m}$: 1 = e : m, also erhält man auch die mfache Verminderung eines Verhältnisses, wenn man dieses durch die ratio *m*tupla dividirt.

In e : 1 stellt e sowohl das erste Glied, als auch den Exponenten dieses Verhältnisses vor, folglich kann man auch sagen, man verdopple, . . . vermfache ein, auf eine andere Maßeinheit bezogenes, Verhältniß, indem man sein erstes Glied oder seinen Exponenten mit 2, . . . mit m multiplicire; und umgekehrt in Beziehung auf die mfache Verminderung.

Zusatz 10. Die richtige Bezeichnung betreffend. Wie man also eine Größe a 2mal, . . . mmal nimmt, oder durch Addition mit sich selbst wiederholt setzt, indem man schreibt 2a (= a + a), . . . ma, eben so ist 2 (1 : 1) = (1 : 1) + (1 : 1) = (1 : 1) (2 : 1) = (2 : 1), und m (e : 1) gleich me : 1. Eben so ist umgekehrt $\frac{1}{2}$ (1 : 1) = $\frac{1}{2}$: 1 = 1 : 2, . . . $\frac{1}{m}$ (1 : 1) = 1 : m. Daher denn auch 2 (a : b) = (a : b) + (a : b) = (a : b) (2 : 1) = 2a : b, u. s. w. Und eben so (a : b) + (c : d), oder, formularisch ausgedrückt, (e : 1) + (m : 1) = e (1 : 1) + m(1 : 1) = (e + m) (1 : 1) = e + m : 1. Daher denn auch umgekehrt: (a : b) — (c : d) = e — m : 1.

Anmerkung. Da das Addiren der Verhältnisse mit seinem Gegentheile, dem Subtrahiren,

4

$\frac{1}{m}$: 1, oder gleich 1 : m. Hieraus erhellt 1), daß, gleichwie die Zahlenbrüche überhaupt durch Theilung der den Zahlen zum Grunde liegenden Einheit zum Vorscheine kommen, auf ähnliche Weise auch die Verhältnisse der kleineren Ungleichheit (§. 6.) aus der Decomposition der allen Verhältnissen, als solchen, zum Grunde liegenden Maßeinheit (1 : 1) entspringen; 2) daß man jedes umgekehrte Verhältniß dadurch entstanden denken könne, daß das Verhältniß (1 : 1) durch das jenem entsprechende direkte Verhältniß dividirt wird (vergl. Zus. 4.).

Zusatz 9. Vermöge Zus. 1. macht oder nimmt man also das Verhältniß e : 1, in welchem sich 2 gleichartige Größen A, B befinden, 2mal, 3mal ... mmal größer, wenn man jenes Verhältniß und eine ratio dupla, 3pla ... *m*tupla zusammensetzt. Denn dadurch hat man 2e : 1, 3e : 1, ... me : 1, d. i. ein 2mal, 3mal, ... mmal größeres Verhältniß, als e : 1, also giebt jene Operation die verlangte Vervielfachung. Sollte umgekehrt e : 1 2mal, 3mal, ... mmal kleiner gemacht oder genommen werden, so müßte man das Verhältniß e : 1 mit einer ratio subdupla, ... submtupla componiren; so ist (e : 1) (1 : 2) = e : 2, und (e : 1) (1 : m) = e : m. Aber der Exponent $\frac{e}{2}$ ist 2mal, und $\frac{e}{m}$ mmal kleiner, als e in e : 1, folglich auch das zusammengesetzte Verhältniß e : 2 2mal, und e : m mmal kleiner, als e : 1.

Allein es ist auch (e : 1) : (m : 1) (Zus. 5.) gleich $\frac{e}{m}$: 1 = e : m, also erhält man auch die mfache Verminderung eines Verhältnisses, wenn man dieses durch die ratio *m*tupla dividirt.

In e : 1 stellt e sowohl das erste Glied, als auch den Exponenten dieses Verhältnisses vor, folglich kann man auch sagen, man verdopple, . . . vermfache ein, auf eine andere Maßeinheit bezogenes, Verhältniß, indem man sein erstes Glied oder seinen Exponenten mit 2, . . . mit m multiplicire; und umgekehrt in Beziehung auf die mfache Verminderung.

Zusatz 10. Die richtige Bezeichnung betreffend. Wie man also eine Größe a 2mal, . . . mmal nimmt, oder durch Addition mit sich selbst wiederholt setzt, indem man schreibt 2a (= a + a), . . . ma, eben so ist 2 (1 : 1) = (1 : 1) + (1 : 1) = (1 : 1) (2 : 1) = (2 : 1), und m (e : 1) gleich me : 1. Eben so ist umgekehrt $\frac{1}{2}$ (1 : 1) = $\frac{1}{2}$: 1 = 1 : 2, . . . $\frac{1}{m}$ (1 : 1) = 1 : m. Daher denn auch 2 (a : b) = (a : b) + (a : b) = (a : b) (2 : 1) = 2a : b, u. s. w. Und eben so (a : b) + (c : d), oder, formularisch ausgedrückt, (e : 1) + (m : 1) = e (1 : 1) + m(1 : 1) = (e + m) (1 : 1) = e + m : 1. Daher denn auch umgekehrt: (a : b) — (c : d) = e — m : 1.

Anmerkung. Da das Addiren der Verhältnisse mit seinem Gegentheile, dem Subtrahiren,

für den Mathematiker, in wiefern er es mit dem Messen zu thun hat, durchaus von keinem Belange und keiner Anwendung ist: so liegt hierin der Grund, warum Euklid in jener Rücksicht keine Erklärungen gab, so wie diese Unterlassung für die späteren Mathematiker eine Veranlassung werden konnte, das Zusammensetzen der Verhältnisse für ein Addiren derselben zu halten.

Zusatz 11. Man setze A : C = e : 1 und B : C = m : 1, so verhält sich (e : 1) : (m : 1) = e(1 : 1) : m(1 : 1) [Zus. 10.] d. i. wie e : m, daher verhält sich auch (A : C) zu (B : C), wie A : B; d. i. Verhältnisse verhalten sich im Allgemeinen zueinander, wie ihre Exponenten, und ins Besondere, Verhältnisse, welche dasselbe Hinterglied haben, verhalten sich direkt zueinander, wie ihre Vorderglieder.

Allein man setze A : B = 1 : e und A : C = 1 : m, so verhält sich (1 : e) zu (1 : m) wie $\frac{1}{e}$ (1 : 1) zu $\frac{1}{m}$ (1 : 1) [Zus. 10.], d. i. wie $\frac{1}{e}$ zu $\frac{1}{m}$, oder wie m : e (Zus. 8.), daher verhält sich auch (A : B) zu (A : C), wie C : B, d. i. Verhältnisse mit demselben Vordergliede verhalten sich umgekehrt zueinander, wie ihre Hinterglieder.

Anmerkung. Gegen Gregor. a St. Vinc., der dieselben Behauptungen aufstellte *),

*) Satz 2. und 9. des ersten Theiles der Abh. „de proport. geom."

bemerkte Hindenburg *): „und so würden sich, nach einer richtigen Folge, die Verhältnisse untereinander, wie ihre Exponenten verhalten. Ein offenbarer falscher Satz, wie die Prämissen (die obigen Sätze), aus denen er folgt. Die Vergleichung der Verhältnisse führt zu den Logarithmen, wie die Vergleichung der einzelnen Glieder in der Verhältniß zu den Exponenten. Hier sind also Verhältnisse und Exponenten von Gregorius miteinander verwechselt worden." Allein Hindenburg irrte: denn nur das Vergleichen der Verhältnisse untereinander, inwiefern sie auseinander, d. i. mittels eines der verglichenen Verhältnisse, das als Wurzel dient, erzeugt gedacht werden, führt auf die Logarithmen, keineswegs aber das Vergleichen der auf das Verhältniß der Gleichheit (1 : 1), als einziges Maß, bezogenen Verhältnisse. Nur auf diese Art des Vergleichens beziehen sich Gregor's Sätze und sind daher unstreitig wahr.

§. 11. Erklärung 13. 1) nach Euklid (lib. V. def. 10. 11.): ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. — Οταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ; — nach der Uebersetzung: cum autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur

*) In der Vorrede zu den oben angef. Erörterungen.

ejus, quam habet ad secundam. At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: et semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

2) Nach Purbach. Dieser bedient sich des Ausdruckes „duplare, triplare" (statt Dupliciren, Tripliciren). Ferner begnügt er sich nicht bloß zu lehren, die Quadrate der Glieder des zu duplicirenden Verhältnisses in Verhältniß zu setzen, um die duplata ratio zu haben, sondern er lehrt auch zwischen den Quadraten jener Glieder noch die mittlere stetige Proportionalzahl finden. So ist, nach Purbach's Sinne, 9 : 4 darum ratio duplata von 3 : 2, weil man 9 : 6 : 4 findet, wobei er sich auf die vorstehende Definition Euklid's beruft. Späterhin faßt er die Arten dieser Vervielfachung des Verhältnisses unter dem Namen „multiplicatio rationis" zusammen. Der Duplatio endlich setzt er die Mediatio entgegen, und indem er z. B. zwischen 8 und 2 die mittlere Proportionalzahl finden lehrt, so daß man hat 8 : 4 : 2, sagt er, daß jedes Verhältniß 8 : 4 oder 4 : 2 die mediata ratio sey, hinzusetzend: „et 8 : 2 quadrupla est, dupla duplae, quia componitur ex duabus duplis."

Erörterung. Man habe n stetig proportionale Größen A, B, C, D, . . ., die, an einerlei Maß gehalten, in der Zahlenprogression $1 : e : e^2 : e^3 : e^4 \ldots$

$e^{n-1} : e^n$ stehen, wo der Exponent e = einer ganzen + Zahl, wie wir setzen, gefunden wird, wenn man jedes Glied der Progression durch das unmittelbar vorhergehende dividirt. Unter dem allgemeinen, leicht zu beweisenden, Satze, daß sich das erste Glied zum nten oder letzten Gliede verhalte, wie die (n—1)te Potenz des ersten Gliedes zur (n—1)ten Potenz des zweiten Gliedes, — sind die Wahrheiten enthalten, daß, wenn 3 Größen stetig proportional sind, sich die erste zur dritten verhalte, wie das Quadrat der ersten zum Quadrate der zweiten; u. s. w. Nämlich für n = 3 hat man $1 : e^2 = 1)^2 : e)^2$; für n = 4 hat man $1 : e^3 = 1)^3 : e)^3$, u. s. w. Oder es ist nach Euklid's Definitionen $1 : e^2$ gleich $(1 : e)^2$ und $1 : e^3$ gleich $(1 : e)^3$. So, wenn T, t zwei ähnliche Dreiecke, P, p zwei ähnliche Parallelepipeden und L, l die homologen Seiten sind, ist $T : t = (L : l)^2$ und $P : p = (L : l)^3$, oder wie die neueren Mathematiker sich nach Euklid auszudrücken pflegen, jene Dreiecke sind im duplicirten (εν διπλασίονι *), diese Körper aber im triplicirten Verhältnisse (εν τριπλασιονι λόγω **) ihrer homologen Seiten, oder, was nach dem zuerst Bemerkten dasselbe ist, die ersten verhalten sich wie die Quadrate, die letzten wie die Würfel ihrer homologen Seiten.

---

*) Prop. 19. lib. VI. Elem.

**) Prop. 33. lib. XI. Elem.

Hieraus ist vorerst so viel klar, daß das durch $(1 : e)^2$, $(1 : e)^3$ . . . bezeichnete Verhältniß gleich sey $1 : e^2$, $1 : e^3$, . . . demnach auch $(a : b)^2$, . . . $(a : b)^m$ überhaupt dasselbe ausdrücken, als $a^2 : b^2$, . . . $a^m : b^m$.

Allein auch durch Zusammensetzung eines Verhältnisses mit sich selbst erhält man nothwendig dieselben Resultate; so ist $(1 : e)(1 : e) = 1 : e^2$, . . . und $(1 : e)$ mmal durch Composition mit sich selbst gesetzt, ist gleich $1 : e^m$. Daß die im §. 10. angeführte Erklärung keine Beschränkung auf ungleiche oder gleiche Verhältnisse gestatte, haben wir eben daselbst bemerkt. Wenn daher $A : B$ und $C : D$ 2 gleiche Verhältnisse sind, so, daß, wenn $A : B$ sich verhält, wie $e : 1$, auch C, D in demselben Verhältnisse stehen, und man fordert die Zusammensetzung jener Verhältnisse: so erhält man $AC : BD$ gleich $e^2 : 1$, u. s. w. und der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses ist wieder das Produkt aus den Exponenten der gleichen Verhältnisse, die zusammengesetzt werden. Es ist also das aus 2, 3, . . . m gleichen Verhältnissen componirte Verhältniß im Sinne Euklid's ein duplicirtes, triplicirtes, . . . mplicirtes Verhältniß, und mit Recht haben mehrere neuere Mathematiker diese aus demselben Verhältnisse oder gleichen Verhältnissen durch Zusammensetzung entspringenden Verhältnisse durch den allgemeinen Namen „multiplicirtes Verhältniß," wie schon Pur-

bach angedeutet hat, zusammengefaßt, um sie als Arten, zum Geschlechte der componirten Verhältnisse gehörig, zu unterscheiden. Denn das generische „πολλαπλασιασμος“ (multiplicatio) begreift auf bestimmte Weise unter sich die Ausdrücke „διπλασιασμος“ (duplicatio, geminatio) und „τριπλασίασμος“ (triplicatio), u. s. w. Man kann daher die Euklid'sche Erklärung genetisch so geben: das Verhältniß, welches die erste von 3 stetig proportionalen Größen zur 3ten hat, ist dasjenige, welches entsteht, wenn man das Verhältniß der ersten Größe zur zweiten mit dem Verhältnisse eben dieser zweiten Größe zur dritten componirt, — oder (da beide Verhältnisse gleich sind) jenes erste Verhältniß einmal durch Multiplikation mit sich selbst verbindet (d. i. jenes Verhältniß duplicirt, verzweifacht), u. s. w. So, um mich eines gemeinen Beispieles zu bedienen, ist ein Faden nicht verzweifacht, wenn man die Fadenlänge noch einmal so groß nimmt, sondern wenn die zweite gleiche Fadenlänge so mit der ersten (durch Verschlingung) verbunden wird, daß der nun entstandene Faden nur als ein einziger, in seiner Stärke um einen Grad gesteigerter, betrachtet werden kann. Dieses ist die Gemination, eben so, wie, wenn auf jedem Halme 2 gleich große Aehren wüchsen, dadurch eine um einen vollen Grad (über die gewöhnliche, einfache) gesteigerte Produktionskraft beurkundet würde.

Es ist also die Duplicatio, Triplica-

tio, ... mplicatio eines Verhältnisses nichts anders, als das Steigern seiner Quantität um einen, 2, ... (m — 1) Grade, was durch Multiplikation des Verhältnisses nach seinem eigenen Gesetze vollendet wird, — kurz! eine wahre Potenzirung. Wie man nämlich aus a die Zahlen a^2, a^3 ... a^m erzeugt, so soll man aus (1 : e) das duplicirte, triplicirte, ... mplicirte, d. i. ein doppelt 3mal, ... mmal höheres (nicht: doppelt, 3mal ... größeres) Verhältniß erzeugen. Und gleichwie in Beziehung, auf a^2, a^3 ... die Einheit nicht mehr zunächst als Maß berücksichtiget, vielmehr jetzt die Zahl a als Wurzel in's Aug gefaßt wird, aus welcher jene Zahlen entspringen; eben so tritt in Beziehung auf $(1 : e^2)$, $(1 : e^3)$ ... das Verhältniß (1 : 1) als Maß in der Hauptbetrachtung zurücke, indem nun das Verhältniß (1 : e) zunächst als Wurzel, keineswegs als Maß, erscheint.

Zusatz 1. Man bezeichnet also einzig richtig das duplicirte Verhältniß, entstanden aus der Wurzel (1 : e), durch (1 : e) (1 : e) gleich $(1 : e)^2$, gleich $1 : e^2$, u. s. w. auf ähnliche Weise, — keineswegs aber durch $(1 : e) + (1 : e) = 2(1 : e)$, u. s. w. wie Karsten, Kästner und Andere thaten, wenn man nicht eine heillose Verwirrung in die Arithmetik hinsichtlich sowohl der Zeichen, als Begriffe bringen will. So könnte man zwar auch durch 2(a), 3(a) ... bezeichnen, daß man die Größe a 2mal,

3mal . . . durch Multiplikation mit sich selbst setzen, d. i. potenziren solle; allein es ist einmal angenommen, daß diese Operationen durch $a)^2$, $a)^3$ . . . gleich aa, aaa, . . . gleich a^2, a^3 . . . bezeichnet werden, und 2(a), 3(a) . . . nichts anders bedeuten, als a + a, . . . oder 2a; . . . eine willkührliche Abänderung könnte also nur auf Kosten der mathematischen Evidenz geschehen. Darum wäre es auch widersinnig, den einmal recipirten Ausdruck „duplicirtes, triplicirtes" Verhältniß gegen den der Potenzen zu vertauschen.

Zusatz 2. Wie die mathemat. Operationen, Potenzirung und Wurzelausziehung entgegengesetzt sind, in demselben Sinne ist auch das mplicirte Verhältniß dem submplicirten, . . . Verhältnisse entgegengesetzt. Wenn daher $1 : e^3$ das triplicirte Verhältniß heißt in Beziehung auf 1 : e, so ist dieses das subtriplicirte in Beziehung auf das erstere, und wenn die Größen A, B im mplicirten Verhältnisse a : b sind, oder sich verhalten wie $(a : b)^m = a^m : b^m$, so verhalten sich auch C, D, die im submplicirten Verhältnisse c : d sind, zueinander, wie $\sqrt[m]{(c : d)}$, oder wie $\sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$. Es ist also die Bezeichnung $\sqrt[m]{(1 : e)}$ oder $(1 : e)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1 : e)$, und ins Besondere $(1 : e)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 : e)$; $(1 : e)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(1 : e)$, . . . un=

tio, . . . mplicatio eines Verhältnisses nichts anders, als das Steigern seiner Quantität um einen, 2, . . . (m — 1) Grade, was durch Multiplikation des Verhältnisses nach seinem eigenen Gesetze vollendet wird, — kurz! eine wahre Potenzirung. Wie man nämlich aus a die Zahlen a^2, a^3 . . . a^m erzeugt, so soll man aus (1 : e) das duplicirte, triplicirte, . . . mplicirte, d. i. ein doppelt 3mal, . . . mmal höheres (nicht: doppelt, 3mal . . . größeres) Verhältniß erzeugen. Und gleichwie in Beziehung, auf a^2, a^3 . . . die Einheit nicht mehr zunächst als Maß berücksichtiget, vielmehr jetzt die Zahl a als Wurzel in's Aug gefaßt wird, aus welcher jene Zahlen entspringen; eben so tritt in Beziehung auf $(1 : e^2)$, $(1 : e^3)$ . . . das Verhältniß (1 : 1) als Maß in der Hauptbetrachtung zurücke, indem nun das Verhältniß (1 : e) zunächst als Wurzel, keineswegs als Maß, erscheint.

Zusatz 1. Man bezeichnet also einzig richtig das duplicirte Verhältniß, entstanden aus der Wurzel (1 : e), durch (1 : e) (1 : e) gleich $(1 : e)^2$, gleich $1 : e^2$, u. s. w. auf ähnliche Weise, — keineswegs aber durch $(1 : e) + (1 : e) = 2(1 : e)$, u. s. w. wie Karsten, Kästner und Andere thaten, wenn man nicht eine heillose Verwirrung in die Arithmetik hinsichtlich sowohl der Zeichen, als Begriffe bringen will. So könnte man zwar auch durch 2(a), 3(a) . . . bezeichnen, daß man die Größe a 2mal,

3mal . . . durch Multiplikation mit sich selbst setzen, d. i. potenziren solle; allein es ist einmal angenommen, daß diese Operationen durch $a)^2$, $a)^3$ . . . gleich aa, aaa, . . . gleich a^2, a^3 . . . bezeichnet werden, und 2(a), 3(a) . . . nichts anders bedeuten, als $a + a$, . . . oder 2a; . . . eine willkührliche Abänderung könnte also nur auf Kosten der mathematischen Evidenz geschehen. Darum wäre es auch widersinnig, den einmal recipirten Ausdruck „duplicirtes, triplicirtes" Verhältniß gegen den der Potenzen zu vertauschen.

Zusatz 2. Wie die mathemat. Operationen, Potenzirung und Wurzelausziehung entgegengesetzt sind, in demselben Sinne ist auch das mplicirte Verhältniß dem submplicirten, . . . Verhältnisse entgegengesetzt. Wenn daher $1 : e^3$ das triplicirte Verhältniß heißt in Beziehung auf $1 : e$, so ist dieses das subtriplicirte in Beziehung auf das erstere, und wenn die Größen A, B im mplicirten Verhältnisse $a : b$ sind, oder sich verhalten wie $(a : b)^m = a^m : b^m$, so verhalten sich auch C, D, die im submplicirten Verhältnisse $c : d$ sind, zueinander, wie $\sqrt[m]{(c : d)}$, oder wie $\sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$. Es ist also die Bezeichnung $\sqrt[m]{(1 : e)}$ oder $(1 : e)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1 : e)$, und ins Besondere $(1 : e)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 : e)$; $(1 : e)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(1 : e)$, . . . un-

richtig, und wäre sie auch dieses nicht, doch höchst willkührlich und verwirrend.

Zusatz 3. Wenn der Mathematiker in der allgemeinen Größenlehre Verhältnisse, die auseinander entstehen, oder auf dieselbe Wurzel, als ihrer gemeinschaftlichen Quelle, bezogen werden, — oder, was dasselbe ist, die Glieder der Progression $1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^n$ miteinander vergleicht: so kann er, nebst der Bestimmung der Art, wie — und durch welche bestimmte arithmetische Operation jedes jener Verhältnisse erzeugt wird (§. 11.), und nebst der Erforschung ihrer relativen Quantität auf gleiche Weise, wie bei andern Verhältnissen, — auch noch in Erwägung ziehen: wie vielmal wird das Wurzelverhältniß $(1 : e)$ zur Erzeugung eines der folgenden Verhältnisse oder Glieder der betrachteten Reihe angewendet — oder, wie oft liegt das Wurzelverhältniß zwischen dem ersten Gliede 1 (oder e^0) und einem folgenden Gliede der Reihe — oder, — das Wurzelverhältniß als Stufe betrachtet, deren Quantität durch die Zahl e bestimmt ist, und mittels welcher man von e^0 zu den folgenden Gliedern oder Verhältnissen der Reihe aufsteigt — wieviele dieser Stufen müssen gleichsam überschritten werden, um zu dem bestimmten Verhältnisse zu kommen? Man sieht, daß die Erwägung dieses Momentes zum Zwecke hat, die Größe des gleichgetheilten Weges zu bestimmen, auf dem man zu den folgenden Verhältnissen der Reihe gelangt, oder auch, wie durch einen Rückblick,

die Entfernung oder den Abstand eines folgenden Verhältnisses oder Gliedes von $1 : e^0$ oder von 1 zu erfahren. Allein, da die Erzeugung einer Größe oder die arithmetische Operation, durch welche eine bestimmte Größe erzeugt wird, für den Mathematiker Hauptsache, die Betrachtung aber der Größe des Weges, auf dem er zu jener Größe gelangt, Nebensache und gewissermassen etwas Zufälliges ist: so erhellt zugleich, daß hinsichtlich der betrachteten Reihe die Erwägung jenes ersten Momentes die wesentliche oder die Hauptbetrachtang sey, in Ansehung welcher die Erwägung des zuletzt genannten Punktes nur als Nebenbetrachtung und von der ersteren abhängig erscheint. Das Resultat aber aus dieser Nebenbetrachtung findet sich leicht.

Gleichwie nämlich zwischen $1 : e^3$ drei Stufen, deren jede gleich $(1 : e)$ ist, liegen, eben so liegen wegen des gleich gesetzmäßigen Fortganges der Reihe allgemein zwischen dem Verhältnisse $1 : e^n$ n solche Stufen oder Zwischenverhältnisse *); mit andern Worten einem n mal höheren Verhältnisse entspricht auch eine n mal größere Stufenzahl, so, daß allgemein die Potenzzahl n in $1 : e^n$ oder $(1 : e)^n$ nothwendig zusammenfällt mit der Zahl der Stufen, die man

*) Hausen (Elem. mathes. p. 50) sagt: si A, B, C, D, E, F fuerint continuo proportionales, erit $A : F = A^5 : B^5$. Exponens 5 est numerus rationum intermediarum.

überschreitet, um bei einem der folgenden Verhältnisse anzukommen. Und gleichwie z. B. e^3 oder $(1 : e)^3$ um 3 solche Stufen, wie e oder $(1 : e)$, von 1 oder e^0 entfernt ist; eben so ist allgemein e^n oder $(1 : e)^n$ um n solche Stufen von 1 entfernt; oder dieselben Potenzzahlen drücken zugleich die Quantität der Entfernung eines folgenden Gliedes der Reihe von dem ersten Gliede aus. Man kann demnach die Größe des Weges, um z. B. zu $(1 : e)^3$ zu kommen, durch $3(1 : e)$, und allgemein durch $n(1 : e)$ in Beziehung auf $(1 : e)^n$ bezeichnen. Gleichwie aber die Größe des abgemessenen, mechanisch durchlaufenen, Weges, nicht das durch Selbstthätigkeit zu erringende Ziel selbst ist, zu dem man auf jenem Wege kömmt; eben so ist die Quantität des durch die arithmetische Operation der Triplication des Wurzelverhältnisses $(1 : e)$ zu erzeugenden Verhältnisses $(1 : e)^3$ nicht selbst die Größe des durch lauter gleiche Verhältnisse $(1 : e)$ führenden Weges; d. i. es ist $(1 : e)^3$ nicht $= 3(1 : e)$ und $(1 : e)^n$ nicht $= n(1 : e)$. Und wie $1 : e$ in Beziehung auf die 3fache oder 3mal größere Stufe nur das Drittel dieser ist, so ist dasselbe Verhältniß das subtriplicirte Verhältniß in Beziehung auf $(1 : e)^3$, oder dessen 3te Wurzel. Wodurch sich denn klar ergiebt, daß Kästner und Andere die Größe des Weges, bestimmt durch eine Summe gleicher Stufen, mit der Größe des Verhältnisses, bestimmt durch Potenzirung, oder das

Verhältniß selbst mit dem Wege, auf dem man zu ihm gelangt, verwechselt und identificirt haben.

Zusatz 4. Es haben also die Exponenten 0, 1, 2, 3 . . . n der Glieder oder Verhältnisse jener betrachteten Reihe zugleich die Nebenbedeutung wahrer Stufenzahlen, können folglich bloßen Stufenzahlen nicht gleichgesetzt werden. Wobei man sieht, daß die Stufenzahl 0 dem Verhältnisse 1 : 1 entspreche, demnach eben dieses Verhältniß, gleich dem geometrischen Punkt, als Anfangspunkt des stufenweise zu durchlaufenden Weges betrachtet werden müsse, welche Zahl auch e seyn möge.

Eben so haben die Exponenten . . . $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ . . . in . . . $e^{\frac{1}{4}}$, $e^{\frac{1}{3}}$, $e^{\frac{1}{2}}$ . . . die Nebenbedeutung von Näherungsstufenzahlen, oder den Zahlen der zwischen 0 und 1 interpolirten Stufen, gleichwie auch jene, zwischen e^0 und e^1 fallenden Glieder oder Verhältnisse solche Zahlen oder Verhältnisse sind, die sich auf der einen Seite der Einheit und auf der andern dem Exponenten e oder dem Verhältnisse 1 : e ins Unendliche nähern können. Solche Näherungsstufen oder genäherte Verhältnisse muß man sich zwischen je 2 andern unmittelbar aufeinander folgenden Stufen und Verhältnissen liegen denken.

Wenn man endlich für e = einer ganzen + Zahl den Exponenten 0, . . . $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, . . . 1, . . . $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{3}$, . . . 2, . . . die

Bedeutung der Zahlen für die gegen die Rechte hin steigenden Stufen giebt, so werden dieselben Exponenten auch die Zahlen seyn für die gegen die Linke hin über Null hinaus fallenden Stufen, folglich das Zeichen — erhalten müssen. Hiedurch hat man die Reihe:

$$\ldots e^{-2} : (\ldots e^{-\frac{1}{3}}, e^{-\frac{1}{4}} \ldots) : e^{-1} : (\ldots e^{-\frac{1}{3}}, e^{-\frac{1}{4}} \ldots) : e^{0} : (\ldots e^{\frac{1}{4}}, e^{\frac{1}{3}} \ldots) : e^{1} : (\ldots e^{1\frac{1}{4}}, \ldots) : e^{2} \ldots$$

Die durch die Glieder dieser Rechts und Links ins Unendliche fortzusetzenden Reihe ausgedrückten Zahlen oder Zahlenverhältnisse bilden, indem sie auf dieselbe Wurzel e oder dasselbe Wurzelverhältniß, als ihrer Quelle, bezogen werden, ein eigenes System, von welchem alle Zahlen, die kein Glied jener Reihe werden können, ausgeschlossen sind. Solche Zahlen oder Zahlenverhältnisse sind die sogenannten negativen Zahlen oder negativen Verhältnisse, wie — e, oder 1 : — e (vergl. §. 7. Zus. 7. Anm. 1.).

Anmerkung 1. Aus dem Gesagten kann man Alles, was zu den Prinzipien der Logarithmentheorie gehört, leicht und ungezwungen ableiten. Lediglich zu Gunsten dieser Theorie glaubten Hausen, Kästner, Karsten und Andere, die Euklid'schen Erklärungen (§. 10. 11.) zum Nachtheile der Evidenz umgehend *), die Zusammen-

*) Die von Kästner (S. 141. der Anfangsgr.) an die Spitze gestellte Erkl. ist: „Wenn man hat a : b,

setzung der Verhältnisse durch eine additive Verbindung der letzteren, folglich das zusammengesetzte Verhältniß als Summe bezeichnen zu müssen. Es konnte nicht fehlen, daß diese in der Natur der Sache nicht gegründete, folglich willkührliche und an und für sich unrichtige Bezeichnung zu manchen Unrichtigkeiten und Verwirrungen führte. Nur Einiges als Belege!

1) Weil a : b, zusammengesetzt mit g : g oder 1 : 1, wieder gleich a : b ist, sagt Kästner, daß bei der Zusammensetzung das Verhältniß der Gleichheit als o anzusehen (also doch 0 nicht gleich zu setzen!) sey. Hätte Kästner geschrieben: (a : b) × (1 : 1), so würde er sich dieses, scheinbar wahren, Ausdruckes nicht bedient haben; offenbar ist er eine Folge jener willkührlichen Bezeichnung; wie nämlich (a : b) + o, so ist auch in der Zusammensetzung (a : b) + (1 : 1) gleich a : b.

2) Gleich darauf sagt Kästner: f : h + g : k + k : g = fgk : hkg = f : h (mit Berufung auf den oben §. 7. Zus. 3. ausgedrückten Satz). Also müssen die Verhältnisse g : k, k : g in der Zusammensetzung einander aufheben, folglich einander entgegengesetzt, eine in Absicht auf die andere negativ seyn. Also ist k : g = — (g : k) oder ratio reciproca est directae negativa. Der erste Kästner'sche Schluß ist falsch.

---

b : e, so sagt man die Verhältniß a : e sey aus diesen beiden Verh. zusammengesetzt." Was Zusammensetzung der Verh. sey, und wie Verhältnisse zusammengesetzt werden, erfährt der Anfänger nicht.

Denn er mußte so schließen: weil aus der Zusammensetzung jener 3 Verhältnisse das Verh. fgk : hkg erhalten wird, aber (nach seinem Satz 21. Cap. V.) $\frac{fgk}{hkg} = \frac{f}{h}$ ist, so ist $\frac{gk}{kg} = 1$, folglich gk : kg = 1 : 1; aber gk : kg (nach seiner Bezeichnung) = g : k + k : g, also ist f : h + g : k + k : g = f : h + 1 : 1. Nun ist (so konnte jetzt erst Kästner fortschließen) 1 : 1 bei der Zusammensetzung (nach 1) als Null anzusehen, also ist auch g : k + k : g bei der Zusammensetzung als o anzusehen. Also, schließen wir, sind diese 2 Verhältnisse in der Zusammensetzung nicht wirklich = o, also heben sie sich, zusammengesetzt, nicht wirklich auf, sind demnach nicht entgegengesetzt (vergl. §. 9. Anm. zu 1. *). Die Veranlassung jener Unrichtigkeit oder erschlichenen Folgerung liegt offenbar in der unrichtigen Bezeichnung; es ist nämlich eigentlich so gefolgert: weil, wie (f : h) + o = f : h, auch (f : h) + (g : k) + (k : g) = f : h ist, so ist auch (g : k + k : g) = o, beide Verhältnisse also sind, wie + a, — a, einander entgegengesetzt. Allein nur Verhältnisse, wie 1 : — e und 1 : + e sind wahrhaft entgegengesetzt.

3) Wenn ferner Kästner sagt: „wenn p : q = q : s, so ist p : s = p : q + p : q = 2(p : q), oder 2mal so groß, die verdoppelte

---

*) Wie Kästner so schloß auch Hausen (elem. mathes. pag. 57.) und Lorenz (in dem Anhange zum Grundr. oder 1. Cursus der gesammten Mathem. Helmst. 1792).

(duplicata, nicht dupla) von p : s, und p : q = ½ (p : s): so sind diese an und für sich unrichtige, Undeutlichkeit und Verwirrung erzeugende Ausdrücke ebenfalls durch seine unrichtige Bezeichnung veranlaßt. Der Anfänger, welcher weiß, daß b = a + a = 2a, folglich a = ½ b sey, wird Alles begriffen zu haben glauben, was hier Kästner voranschickt. Allein das wird ihn stutzig machen, daß p : s doppelt so groß, als p : q, und doch nicht das Doppelte sondern das Verdoppelte von p : q seyn soll; denn bisher hatte er es für gleichgeltend gehalten, zu sagen, eine Größe doppelt, oder zweimal so groß nehmen, und eine Größe verdoppeln. Setzt er ferner, um sich die Sache etwa durch ein Beispiel klar zu machen, 4 : 1 mit dem gleichen Verh. 4 : 1 zusammen, so soll nach Kästner 16 : 1 noch einmal so groß als 4 : 1, d. i. als die Wurzel (4) zur Einheit, seyn; aber eine leichte Vergleichung wird ihm zeigen, daß 16 : 1 4mal, nicht noch einmal, so groß sey, als 4 : 1, und eben so, daß 4 : 1 nicht als die Hälfte, vielmehr als 2te Wurzel von 16 : 1 erscheine *). Allein hätte Kästner, sich auf die Euklid'schen Erklärungen fußend, gesetzt: $p : s = (p : q)^2 = p^2 : q^2$: so wäre es dem Anfänger sogleich klar gewesen, daß p : s (wie a^2 mit a verglichen) dem Grade nach noch einmal so groß,

*) Lorenz (im erwähnten Anhange S. 18.) glaubt die Verwirrung durch eine neue Undeutlichkeit zu heben, indem er sagt: man muß das Vielfache der Verhältniß (ratio multiplicata) von dem vielfachen Verh. (rat. multipla) wohl unterscheiden.

Denn er mußte so schließen: weil aus der Zusammensetzung jener 3 Verhältnisse das Verh. fgk : hkg erhalten wird, aber (nach seinem Satz 21. Cap. V.) $\frac{fgk}{hkg} = \frac{f}{h}$ ist, so ist $\frac{gk}{kg} = 1$, folglich gk : kg = 1 : 1; aber gk : kg (nach seiner Bezeichnung) = g : k + k : g, also ist f : h + g : k + k : g = f : h + 1 : 1. Nun ist (so konnte jetzt erst Kästner fortschließen) 1 : 1 bei der Zusammensetzung (nach 1) als Null anzusehen, also ist auch g : k + k : g bei der Zusammensetzung als o anzusehen. Also, schließen wir, sind diese 2 Verhältnisse in der Zusammensetzung nicht wirklich = o, also heben sie sich, zusammengesetzt, nicht wirklich auf, sind demnach nicht entgegengesetzt (vergl. §. 9. Anm. zu 1. *). Die Veranlassung jener Unrichtigkeit oder erschlichenen Folgerung liegt offenbar in der unrichtigen Bezeichnung; es ist nämlich eigentlich so gefolgert: weil, wie (f : h) + o = f : h, auch (f : h) + (g : k) + (k : g) = f : h ist, so ist auch (g : k + k : g) = o, beide Verhältnisse also sind, wie + a, — a, einander entgegengesetzt. Allein nur Verhältnisse, wie 1 : — e und 1 : + e sind wahrhaft entgegengesetzt.

3) Wenn ferner Kästner sagt: „wenn p : q = q : s, so ist p : s = p : q + p : q = 2(p : q), oder 2mal so groß, die verdoppelte

---

*) Wie Kästner so schloß auch Hausen (elem. mathes. pag. 57.) und Lorenz (in dem Anhange zum Grundr. oder 1. Cursus der gesammten Mathem. Helmst. 1792).

(duplicata, nicht dupla) von p : s, und p : q = ½ (p : s): so sind diese an und für sich unrichtige, Undeutlichkeit und Verwirrung erzeugende Ausdrücke ebenfalls durch seine unrichtige Bezeichnung veranlaßt. Der Anfänger, welcher weiß, daß $b = a + a = 2a$, folglich $a = \frac{1}{2} b$ sey, wird Alles begriffen zu haben glauben, was hier Kästner voranschickt. Allein das wird ihn stutzig machen, daß p : s doppelt so groß, als p : q, und doch nicht das Doppelte sondern das Verdoppelte von p : q seyn soll; denn bisher hatte er es für gleichgeltend gehalten, zu sagen, eine Größe doppelt, oder zweimal so groß nehmen, und eine Größe verdoppeln. Setzt er ferner, um sich die Sache etwa durch ein Beispiel klar zu machen, 4 : 1 mit dem gleichen Verh. 4 : 1 zusammen, so soll nach Kästner 16 : 1 noch einmal so groß als 4 : 1, d. i. als die Wurzel (4) zur Einheit, seyn; aber eine leichte Vergleichung wird ihm zeigen, daß 16 : 1 4mal, nicht noch einmal, so groß sey, als 4 : 1, und eben so, daß 4 : 1 nicht als die Hälfte, vielmehr als 2te Wurzel von 16 : 1 erscheine *). Allein hätte Kästner, sich auf die Euklid'schen Erklärungen fußend, gesetzt: $p : s = (p : q)^2 = p^2 : q^2$; so wäre es dem Anfänger sogleich klar gewesen, daß p : s (wie a^2 mit a verglichen) dem Grade nach noch einmal so groß,

*) Lorenz (im erwähnten Anhange S. 18.) glaubt die Verwirrung durch eine neue Undeutlichkeit zu heben, indem er sagt: man muß das Vielfache der Verhältniß (ratio multiplicata) von dem vielfachen Verh. (rat. multipla) wohl unterscheiden.

als p : q, folglich die Größe des Verhältnisses p : s gleich sey der zur 2ten Potenz gesteigerten Größe des Verh. p : q; daß sich also in jeder Hinsicht (p : s) : (p : q) verhalte, wie das Quadrat zur 2ten Wurzel.

Ueberhaupt zeigen die 3 angeführten Punkte klar, daß Kästner die zusammenzusetzenden Verhältnisse als bloße Stufen, das zusammengesetzte Verh. folglich als bloße Stufensumme betrachtete. So entspricht es dieser Betrachtungsweise, das Verhältniß der Gleichheit, als Anfangspunkt der Stufen (§. 11. Zus. 4.) hinsichtlich der Stufensumme für Null zu nehmen. Wenn ferner in der oben betrachteten Reihe das Verhältniß (1 : e) als vor- oder aufwärts führende Stufe genommen wird, so muß man (e : 1) als rück- oder abwärts gehende, d. i. als jener entgegengesetzte Stufe nehmen, so, daß folglich durch beide zugleich vorhandene Stufen die Stufensumme ungeändert bleibt. Auch sagt Kästner bei dem Satze: 1 : q^2 ist noch einmal so groß, als 1 : q . . . ausdrücklich *): „Man kann sich gleichsam gleiche Schritte vorstellen, die von 1 bis q und von q bis q^2 geschehen, und also zwischen 1 und q^2 eine noch einmal so große Entfernung geben, als zwischen 1 und q." Noch bemerken wir, daß die Betrachtung nur solcher Reihen, wie unsere obige (§. 11. Zus. 3.), in der alle Verh. aus demselben Wurzelverhältnisse entspringen, auf die Nebenbetrachtung der Stufen, so zufällig diese auch seyn mag, doch ganz natürlich leite, daß es aber kaum gerechtfertigt werden könne,

*) S. 143 der Anfangsgr. d. Arithm.

diese Nebenbetrachtung der Theorie der Zusammensetzung der Verhältnisse überhaupt, wie Kästner that, zum Grunde zu legen. Darum hat sich auch bei seiner Theorie Undeutlichkeit und Gezwungenheit an die Spitze gestellt *).

4) Karsten, der das Willkührliche und Verwirrende dieser Kästner'schen Theorie gefühlt zu haben, und daher in ein Schwanken gerathen zu seyn scheint, sucht jener Theorie einige Stützpunkte zu geben. Er sagt **): „die gleichen Verhältnisse m : n, m : n, . . . aus welchen A : D zusammengesetzt ist, sind also in Ansehung dieses ganzen Verhältnisses eben das, was die aliquoten Theile einer Größe gegen die ganze Größe sind.“ Allein der Ausdruck „aliquote Theile“ bezeichnet die Operation, die wir Messen nennen. Dieser aus der Geometrie in die Arithmetik herübergetragene Begriff fordert ein als Einheit angenommenes Maß, welches mit der zu messenden Größe gleichartig ist, so, daß dann die zu messende Größe als aus der Wiederholung dieser Maßeinheit entsprungen gedacht wird. So ist $2 = \frac{1}{4}\,8$, oder aliquoter Theil der Zahl 8 und $8 = 2 + 2 + 2 + 2$, d. i. die Zahl 8 wird dadurch entsprungen gedacht, daß man die Zahl 2, als aliquoten Theil, so oft durch Addition wiederholt, als der wievielste Theil sie von 8 ist. Darum nennt man auch die Zahleinheit das Maß aller Zahlen und jede Zahl ein Maß ihrer selbst. Ist nun zwar eine

---

*) Vergl. S. 141. ebend. Nr. 1. und 3.

**) S. 203 des 2ten Th. seines Lehrbegriffes.

Zahl a das Maß einer andern a', ohne daß a' durch wiederholtes Addiren der Zahl a nach dem Gesetze des Quotienten entsprungen gedacht wird, so nennt man a nicht das Maß, sondern die Wurzel von a'. So ist 2 die 3te Wurzel von 8, inwiefern man 8 nicht aus 2 + 2, . . . sondern aus 2 . 2 . 2 erzeugt denkt. Inwiefern also die Zahl 8 eine Potenzzahl ist, ist 2 kein aliquoter Theil derselben, indem 2 nicht auch der 3te Theil von 8 ist. Gleichwie also in Beziehung auf A^m A, wenn gleich Maß von A^m, nicht als Maß, sondern als Wurzel erscheint, so daß A^m nicht $=$ mA und A nicht $= \frac{1}{m} A^m$ seyn kann, wenn man nicht Alles untereinander wirren will: eben so ist, wenn A : D ein vervierfachtes, d. i. aus 4 gleichen Verhältnissen (deren jedes $=$ m : n) zusammengesetztes Verhältniß ist, (m : n) nicht $= \frac{1}{4}$ (A : D) und A : D nicht $=$ 4 (m : n).

Zur Rechtfertigung der vorhin angeführten Ausdrücke „zweimal so groß, halb so groß, u. d. gl.' sagt Karsten *): die Redensart „der Exponent von (B : A) drückt die Größe dieses Verhälnisses aus" sey zweideutig; denn einmal könne sie so viel heißen: „der Exponent m drückt die Größe des einen Gliedes B gegen das andere Glied A aus, was richtig sey. Dieselbe Redensart könne aber auch wohl so erklärt werden: „der Exponent m drückt die Größe des Verh. B : A gegen ein anderes Verhältniß aus, dessen Größe man

*) S. 373 des I. Th. s. Lehrbegr.

als bekannt ansieht," und in diesem Verstande sey der Satz keineswegs allgemein richtig. Karsten mußte demnach zeigen, in welchen Fällen dieser letzte Satz richtig, und in welchen Fällen er unrichtig sey. Das thut er nicht, vielmehr ist das als Beweis Beigefügte so beschaffen, daß er geradezu die Unrichtigkeit dieses Satzes hätte behaupten müssen. Er sagt nämlich: „Wenn man fragt: wie groß ist eine einzelne Größe B gegen A? so ist dieß ganz etwas anders, als wenn man frägt: wie groß ist das Verh. B : A gegen ein anderes bekanntes Verhältniß? Die Vergleichung der Exponenten der Verhältnisse, als einzelner Größen, miteinander ist also ganz etwas anders, als die Vergleichung der Verhältnisse untereinander selbst." Wenn Karsten mit Allem dem nicht sagen wollte: „die Exponenten der Verhältnisse, miteinander verglichen, entscheiden nicht, wie oft ein Verhältniß ein anderes bekanntes Verhältniß überhaupt enthalte?" so mag ein scharfsinnigerer Mathematiker das von Karsten Vorgebrachte entwirren. Wollte er aber dieses sagen, was ohne Umschweif geschehen konnte, so mußte er sich auf den Punkt gebracht fühlen, aus dem Zustande des Schwankens herauszutreten und zu untersuchen, ob in Beziehung auf A : C, das z. B. aus 3 gleichen Verhältnissen, deren jedes = m : n, zusammengesetzt ist, die gleichen Verhältnisse als Summanden, oder als Faktoren enthalten seyen. Entschied er sich für das Erste, so mußte er A : C = m : n + m : n + m : n, wie Kästner, schreiben, und nun es als unstreitig aussprechen, daß A : C = 3(m : n), und m : n = $\frac{1}{3}$(A : C), d. i. daß A : C

3mal so groß, als m : n, und m : n das Drittel von A : C sey. Entschied er sich für das Zweite, so mußte er das Vorige als unrichtig verwerfen; denn in A : C = (m : n)^3 ist weder A : C 3mal so groß, als m : n, noch m : n der 3te Theil von A : C, wie man nicht spricht, daß a^3 3mal so groß, als a, und a = $\frac{1}{3}$ a^3 sey. Karsten unterließ diese Untersuchung. Man sieht übrigens, daß die Exponenten der Verhältnisse nur dann entscheiden, wenn man diese zur Erforschung ihrer relativen Quantitäten miteinander vergleicht, keinesweges aber, wenn man in Beziehung auf Verhältnisse, die auseinander entspringen, untersucht, um wie viele Stufen das eine Verhältniß vom andern abstehe, oder um den wievielsten Grad sie einander übertreffen.

5) Hindenburg, auf den sich Karsten beruft, und welcher in den Zusätzen zu den oben erwähnten Lempe'schen Erörterungen der Kästner'schen Arithm. auf dem rechten Wege war, aber in der Vorrede zu diesem Buche wieder auf Hausen's und Kästner's Bahn einlenkte, bringt zur Entscheidung Folgendes vor: „in der geometr. Reihe 1 : e : e^2 : e^3 . . . : e^n kann man die Verhältnisse jeder 2 Glieder als Intervallen ansehen. So giebt es von 1 zu e^3 deren 3, jedes so groß, als 1 : e, wenn man diese Verhältniß zur Einheit oder zum Maße annimmt. Also ist 1 : e^3 die Summe dieser Intervallen, nicht das Produkt. Auch enthält die zusammengesetzte Verhältniß 1 : e^n die einfache e : 1 nmal (oder jene ist die nplicata von dieser), eben so, wie bei den Zah-

len nA die Zahl A nmal enthält *). Besonders einleuchtend zeigt das auch die Arithmetik der Töne und die dabei gewöhnliche Zusammensetzung der Verhältnisse." — Es ist schon an und für sich eine mißliche und gegen die Richtigkeit einer Behauptung Mißtrauen erregende Sache, wenn man sich gezwungen fühlt, den Beweis, oder doch die Erörterung aus einer Disciplin herzuholen, die in ihrer mathematischen Ansicht ihre Begründung in demselben Theile der Mathematik, wo jene Behauptung aufgestellt wird, suchen muß. Was Hindenburg Intervalle nennt, nannten wir oben im allgemeineren Sinne Stufen, bemerkend, daß die Erforschung, durch welche arithmetische Operation z. B. das Verh. 1 : e^3 aus 1 : e erzeugt werde, für den Mathematiker Hauptsache, gewissermassen aber nur Nebensache sey, zu untersuchen, wie groß der Weg, oder die Zahl der Schritte sey, die man machen müsse, um zu dem Verhältnisse 1 : e^3 zu gelangen, sobald man sich dieses als zu einer Reihe von Verhältnissen gehörig vorstellt. Es erhellt zugleich, daß daraus, daß man in einer solchen Reihe durch 3 Intervalle (wie 1 : e) zu 1 : e^3 aufsteige, nicht folge, daß dieses Verhältniß durch Summation dieser Intervalle erzeugt werde, sondern es folgt nur soviel, daß die Potenzzahl in $(1 : e)^3$

*) Mit dem großen Unterschiede, daß A in nA durch Addition, 1 : e aber in 1 : e^n durch Multiplikation mit sich selbst gesetzt, folglich A ein aliquoter Theil von nA, aber 1 : e die nte Wurzel von 1 : e^n ist.

die Summezahl der Intervallen seyn müsse. Für $e = 2$ hat man $1 : 2 : 2^2 : 2^3 : 2^4, \ldots$ oder $1 : 2 : 4 : 8 : 16, \ldots$ oder $100 : 200 : 400 : 800 : 1600 \ldots$ Wenn nun der Ton C einer gespannten Saite bei 100 Schwingungen in 1 Sekunde, der Ton c einer andern Saite bei 200 Schwingungen in derselben Zeit gehört wird: so sagt man, diese 2 Töne verhalten sich zueinander wie $1 : 2$; der zweite Ton ist nocheinmal so hoch als der erste, und ihr Abstand voneinander oder ihr Intervall heißt Octave (Diapason), gleichwie man auch den 8ten Ton c, zu dem man, von C aufsteigend, durch 7 tiefere Töne, als Stufen, gelangt, selbst die höhere oder obere Octave nennt. Wenn ferner ein Ton c′ bei 400, ein Ton c″ bei 800, ein Ton c‴ bei 1600. . . . Schwingungen (in 1″ vollendet) gehört wird: so sieht man, daß dasselbe Intervall oder die Octave zwischen je 2 unmittelbar aufeinanderfolgenden Tönen herrsche, daß man folglich durch lauter gleiche Intervalle zu den höheren Tönen c, c′, c″ . . . von C aufsteige. Man erkennt folglich aus dem doppelten, 3fachen, 4fachen . . . Intervalle, daß der Ton c′ 4mal, der Ton c″ 8mal und der Ton c‴ 16mal . . . höher sey, als der Ton C. Während also die die Höhe der Töne bedingenden Schwingungszahlen in der geometrischen Progression $1 : 2 : 2^2 : 2^3 \ldots$ fortgehen, bilden die Intervallzahlen die arithmetische Progression 0, 1, 2, 3 . . . sind daher die Logarithmen der Schwingungszahlen oder der Höhen der Töne. Man kann also nicht sagen, daß das Verhältniß C : c″ oder $1 : 2^3$, d. i. das Verhältniß der Schwingungs=

zahlen dieser Töne die Summe dreier Intervalle oder Octaven sey, — sondern die Potenzzahl 3 in $(1 : 2)^3$ zeigt, daß man dieses Verhältniß $1 : 2^3$ nur durch Verdreifachung (Triplication) des ein Intervall, das eine Octave seyn oder heißen soll, bedingenden Verhältnisses (1 : 2) zweier Töne *) erzeugen, demnach zu dem Tone c'', der sich zu C, wie 8 : 1, verhalten soll, nur durch ein 3mal größeres Intervall, als der Abstand des Tones c von C ist, von C aus gelangen könne. Wenn man nun in der Musik, wo die Intervallenlehre von größter Wichtigkeit ist, durch eine Art von Umkehrung das Verhältniß der Töne oder der ihnen zukommenden Schwingungszahlen zum Merkmal des entsprechenden Intervalls macht, daher z. B. spricht: die doppelte Octave entsteht durch das Verhältniß 1 : 4; die 3fache durch das Verhältniß 1 : 8; . . . so hat dieses seinen Grund darin, weil der Musiker die Töne durch die in 1'' vollendeten Schwingungen verhältnißmäßig schon als etwas Gegebenes betrachtet, und dazu den Namen des Intervalls und die Zahl der entsprechenden Intervalle sucht und bestimmt, — statt, daß der Mathematiker durch das Aufsteigen durch ein doppelt — 3mal . . . größeres Intervall, als das zwischen C und c ist, gleichsam den gleichgetheilten Weg bezeichnet, auf dem man zu immer höheren Octavtönen, d. i. solchen Tönen gelangt, deren Höhe durch Duplication, Triplication, . . . des Grundverhältnisses (1 : 2) der Schwingungszahlen hervorgebracht wird. Es ist also unrichtig, das Verhältniß $1 : 2^3$ als Summe der Intervalle zu betrachten.

Anmerkung 2. Durch diese unrichtige, nur

*) So ist durch das Verhältniß 6 : 4 (ratio sesquialtera) die Quinte (Diapente), durch 4 : 3 (rat. sesquitertia) die Quarte (Diatessaron) als Intervall bedingt, weßwegen man auch 6 : 4 : 3 die harmonische Proportion nennt.

durch Verlassung des von Euklid vorgezeichneten Weges möglichen, Theorie, nach welcher $(1 : e)m = (1 : e) + (1 : e) + \ldots = m(1 : e)$ und $(1 : e)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1 : e), \ldots$ ist, wurden nach Kästners Vorgange *) Lorenz und Andere, die ihm folgten, verleitet, zu glauben, die wahre und ursprüngliche Beschaffenheit der Exponenten (z. B. in a^0, a^3, $a^{\frac{1}{3}} \ldots$) könne einzig durch die Lehre von der Zusammensetzung der Verhältnisse eingesehen und so eine allgemein gültige Definition des Exponenten aufgestellt werden. Wenn wir noch bemerken, das diese versuchte Exponententheorie besonders auch die unter 1. und 2. in der vorigen Anmerk. angeführten Behauptungen zur Grundlage habe: so wird man von selbst schließen, daß eine aus so trüber Quelle geschöpfte Erklärung der Natur der Exponenten der Größen mehr eine Verdunklung, als Erklärung heissen müsse. Auch hierüber nur Einiges als Beleg!

a) Daß a^0 oder auch $(1 : a)^0 = o(1 : a) = 1 : 1 = 1$ sey, soll nach Lorenz **) dadurch erhellen, weil $o(a : b) = m : m$ sey, was er so beweist: $(a : b) + (m : m)$ ist wieder $= a : b$, also ist $m : m$ bei der Zusammensetzung der Verhältnisse als Null anzusehen; also ist $m : m = o(a : b)$. Man sieht leicht, daß dieser sogenannte Beweis ganz derselbe sey, wie der oben angeführte Kästner'sche, und daß er sowohl die unrichtige Bezeichnung der Zusammensetzung der Verh., als die erschlichene Behauptung: „$m : m$ ist wirklich = Null" — zum Grunde habe. Der Beweis ist nämlich eigentlich dieser: gleichwie $(a : b) + o$, oder $(a : b) + o(a : b)$ gleich $a : b$ ist, eben so ist auch $(a : b) + (m : m) = a : b$,

---

*) Vergl. dessen Abhandl. „de Translatis in dictione Geometrarum."

**) Grundlehren der allg. Größenber. Th. I. S. 59.

also muß auch $0(a : b)$ oder Null gleich seyn $m : m$. So und nicht anders kann man schließen, wenn man mittels der unrichtigen, hier als Grundlage dienenden, Theorie darthun will, daß $a^0 = 1$ sey. Hr. Prof. Metz *), obgleich auf derselben Theorie sich fußend, verwirft den Lorenz'schen Beweis weil er $0(a : b)$ (nach Lorenz $= 0$) als eine Zusammensetzung der Verhältnisse betrachtet, — und giebt für $a^0 = 1$ folgenden Beweis: $n^0 = n^{m-m} = (1 : n)^{m-m} = (m - n)(1 : n) = m(1 : n) + (- m(1 : n)) = (1^m : n^m) + m(n : 1) = (1^m : n^m) + (n^m : 1^m) = n^m : n^m = 1 : 1 = 1$ **), wobei denn in Beziehung auf $- m(1 : n) = + m(n : 1)$ der oben erwähnte Kästner'sche Satz mit der Bezeichnung $(a : b) = - (b : a)$ zum Grunde liegt. Allein es ist $(m - m) A = 0A = 0$, und nichts anders, was auch A bedeuten mag, so wie auch $(m - m)(1 : n) = m(1 : n) - m(1 : n)$, d. i. die Differenz gleicher Größen, folglich als solche nach den allgemeinen Gesetzen des Calculs gleich Null ist. Denselben Gesetzen widerstrebt es, eine solche Differenz durch Aenderung des Zeichens $(-)$ in $(+ -)$ verschwinden und nun in eine Zusammensetzung eines ordentlichen und umgekehrten Verhältnisses übergehen zu machen, so, daß es scheint, man dürfe z. B. auch $a^2 - a^2 = (1 : a)^2 - (1 : a)^2 = 2(1 : a) + (- 2(1 : a)) = 2(1 : a) + 2(a : 1)$ setzen, woraus denn durch Zusammensetzung $a^2 : a^2$, oder $1 = a^2 - a^2$ erhalten würde. Man wird eingestehen müssen, daß eine Theorie, welche die Exponenten in reine Coefficienten ver-

---

*) In seiner Abh. „de indole rationis quantitatum compositae indeque manante adaequata exponentis notione" — pag. 38.

**) Wenn man Kästner's Behauptung (Gesch. d. Math. 3. Th. S. 259.) „die Verhältniß der Gleichheit ist unter den Verhältnissen, was 0 unter den Zahlen ist" — geradhin gelten läßt, so ist $a^0 = 0$.

wandelt und allgemeine Rechnungsgesetze ausschließt, entweder unrichtig oder in Dunkelheit gehüllt sey, oder schärfer begründet werden müsse.

b) Man soll z. B. in $2^{\frac{1}{3}}$ die ursprüngliche Natur des Exponenten erst dadurch erkennen, daß man setzt: $2^{\frac{1}{3}} = (1 : 2)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(1 : 2)$, so, daß demnach $2^{\frac{1}{3}}$ eigentlich bedeute, man solle den 3ten Theil von (1 : 2) nehmen. Aber wie geschieht dieses? durch Division mit 3? das geht nicht; durch $\sqrt[3]{(1:2)}$? das wäre petitio principii; — also dadurch etwa, daß man 1 : x : y : 2 setzt, d. i. 2 mittlere stetige Proportionalzahlen zwischen 1 und 2 sucht. Aber wie sucht man diese? nicht anders, als so, daß man das 2te Glied x nach der Formel $x = \sqrt[n-1]{a^{n-2} z}$, also in unserem Falle, wo $n = 4$, $a = 1$ und $z = 2$ ist, $x = \sqrt[3]{2}$ entwickelt. Aber das ist abermals petitio principii; denn $\sqrt[3]{2}$ ist wieder dasselbe, was $2^{\frac{1}{3}}$ ist, und wir sollen die eigentliche Natur des gebrochenen Exponenten eben erst aus der Zusammensetzung der Verhältnisse kennen lernen. — Nein, die Potenz- und Wurzeltheorie hat ihre eigene, von der Theorie der Verhältnisse unabhängige, feste Begründung, und diese Theorie kann der ersteren zu ihrem Verstehen nicht entbehren. — Auch ist eine Erklärung des Exponenten in seinen verschiedenen Bedeutungen keine *mathematische* Definition, mehr eine Description, und kann darum nicht auf Allgemeinheit Anspruch machen, weil wir mit dem Fortgange der Wissenschaft immer auf andere Exponenten stoßen können, deren Bedeutung aus der Natur des Gegenstandes, keineswegs aus dem zusammengesetzten Verhältnisse eingesehen werden kann, wie dieses z. B. mit den Größen $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{-1}}$, a^{e^x}, ... der Fall ist.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schön, Johann

Erörterung einiger Hauptmomente in der Lehre von dem geometrischen Verhä
ltnisse im Sinne Euklid's und anderer Mathematiker e. Programm zu d.
Vorlesungen über d. reine allg. Größenlehre

Würzburg 1821

Don.Lud. XLV,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10729280-8